

Homogene, stationäre Verkehrsflüsse mit diskreten Beschleunigungswerten

Eine in der Verkehrsflußtheorie typische Vorgehensweise bei der Evaluierung eines Modells ist die Beantwortung der Frage, wie sich das Modell unter der Annahme eines räumlich homogenen, zeitlich stationären Verkehrs verhält. Bei vielen Verkehrsmessungen wird diese Stationarität angenommen und daher zeitliche Mittelungen über die interessanten Flußgrößen durchgeführt. Unter der Annahme der zeitlichen Stationarität der Fahrzeugdichte folgt sofort die räumliche Homogenität des Flusses, d.h. aus lokalen Messungen kann auf den gesamten Verkehrsfluß auf einem Streckenabschnitt geschlossen werden. Wie in [1] kurz erläutert wurde, genügt die Stationaritätsannahme alleine nicht aus um diese Entscheidung treffen zu können. Vielmehr muß der Verkehrsfluß auch unabhängig vom Anfangszustand bei Meßbeginn sein. Stationäre Zustände, die auch unabhängig vom Anfangszustand sind bezeichnet man stochastisches Equilibrium oder stochastisches Gleichgewicht [2] ¹. Es ist unklar und aus der Sicht des Autors auch zweifelhaft, ob alle Punkte der gemessenen Fundamentaldiagramme (z.B. Abb. 10 aus [1]) innerhalb des stochastischen Equilibriums ermittelt wurden oder ob dieser Zustand für jede Verkehrsdichte überhaupt existiert. Obleich diese Fragestellung auf dem ersten Blick akademisch erscheint, ist sie doch von fundamentaler Bedeutung für die Verkehrsflußmodellierung. So gibt es zur Zeit eine Vielzahl von Modellen, welche in Anlehnung an die irreversible Thermodynamik das Fundamentaldiagramm als Phasendiagramm auffassen und hieraus Schlüsse ziehen. Thermodynamische Phasen in physikalischen Systemen sind Bereiche in Fundamentaldiagrammen für die ein stochastisches Gleichgewicht existiert. Daher ist die Frage nach dem Verhalten von Verkehrsflußmodellen im stochastischem Gleichgewicht von fundamentaler Bedeutung.

Um diese Frage in dem in [3] vorgestellten Modell zu behandeln, wird die besondere Geometrie einer Ringstraße ohne Zu- und Abflüsse, in der sich N Fahrzeuge bewegen gewählt. Aufgrund der räumlichen Symmetrie kann sich im Laufe der Zeit eine Fahrzeugzustandsdichte entwickeln, die unabhängig vom Ort ist. Dies muß nicht notwendig der Fall sein. So ist auch eine zeitlich periodische Zustandsdichte denkbar, d.h. ein Fahrzeugpulk der auf der Kreisstraße rotiert. Dies wäre aber nur durch den Einsatz untypischer Fahrer oder dem Fahren an der zulässigen Grenzgeschwindigkeit denkbar und stellt damit einen Sonderfall mit fragwürdiger zeitlicher Stabilität dar.

Nimmt man einen homogenen Fahrzeugstrom Q auf einer Ringstraße der Länge L an, so ergibt sich die mittlere Fahrzeugdichte stationär zu $K = N/L$. Die Zustandsdichte hängt dann nicht mehr vom Ort ab, d.h. $f = f(v, a, t)$. Setzt man dies in die Mastergleichung für die sprunghafte Beschleunigungsänderung 13 aus [3] ein und beachtet aufgrund der Diskussion

¹In der Theorie der stochastischen Prozesse gibt es unterschiedliche Stationaritätsbegriffe. Hier wird Stationarität im starken Sinne verstanden, d.h. alle Momente der Zustandsdichte sind unabhängig von der Zeit.

in [3], daß die Interaktions- und Korrelationsfunktionen nicht von x, t, \bar{a} abhängen, so ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial v} = \int_{\bar{v}, a', \bar{a}} \{ \Sigma(a|v, \bar{v}, a') f(v, a', t) - \Sigma(a'|v, \bar{v}, a) f(v, a, t) \} \cdot f(\bar{v}, \bar{a}, t) d\bar{v} d\bar{a} da' \quad (1)$$

mit

$$\Sigma(a|v, \bar{v}, a') = \int_h \sigma(a|v, \bar{v}, a', h) Q^0(v, \bar{v}, a', h) D(h|v) dh . \quad (2)$$

Die Integrationsgrenzen werden unten festgelegt. Gleichung 1 enthält keine Ortsabhängigkeit. Die Interaktion Σ stellt aber eine über D abstandsgemittelte Funktion dar. Durch die fehlende Ortsableitung auf der linken Seite der Gleichung entsteht eine zusätzliche Symmetrie bezüglich der Geschwindigkeit. Ist $\Sigma(a|v, \bar{v}, a') = \Sigma(a|\bar{v} - v, a')$ nur abhängig von der Relativgeschwindigkeit der Fahrzeuge, dann ist f translationssymmetrisch entlang der Geschwindigkeitsachse. Notwendig für die Annahme ist die Voraussetzung, daß die Fahrzeuggeschwindigkeiten hinreichend groß sind, so daß 'Stop-and-Go'-Effekte und damit die Besonderheiten bei $v = 0$ keine Rolle spielen. In den unten aufgeführten Abschnitten werden Verkehrsflüsse betrachtet, die die Annahme zumindest näherungsweise erfüllen.

Eine stationäre Lösung f_s von Gleichung 1 ergibt sich durch die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(v, a, t) = f_s(v, a), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 ,$$

falls diese existieren. Sie kann i.a. von der Anfangsbedingung $f(v, a, t = 0)$ abhängen und stellt damit nicht notwendig ein stochastisches Equilibrium f_e dar. Um eine mögliche Equilibriumlösung zu erhalten muß die Gleichung 1 für $f_e(v, a)$ gelöst werden, d.h. ohne Zeitableitung und Zeitabhängigkeiten.

In den folgenden Abschnitten werden konkrete einfache Interaktionsmodelle verwendet, um das Lösungsverhalten der Gleichung zu untersuchen. Ziel ist es dabei zu prüfen in wie weit stationäre bzw. Equilibriumlösungen das typische Aussehen der in [1] beschriebenen Verteilungen besitzen.

1 Modelle mit diskreten Beschleunigungswerten

Ogleich die Beschleunigungsvariable in Verkehrsflußmodellen eine kontinuierlich veränderliche Größe ist, sind Diskretisierungen schon aus Gründen der i.a. numerischen Lösung der Modellgleichung von Interesse. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten zur Diskretisierung der Integrale in Gleichung 1 wobei Diskretisierungsfehler möglichst klein sein sollen. Daher sollten im Modell enthaltene Erhaltungsgrößen möglichst auch in der diskretisierten Form der Gleichung exakt wiedergegeben werden. Hier ist dies

$$\int_a \sigma(a|v, \bar{v}, a') da = 1 .$$

Führt man die Diskretisierung von σ gemäß Gleichung 18 aus [3] durch so ergibt sich

$$\Sigma(a|v, \bar{v}, a') = \sum_{i=1}^m \Sigma_i(v, \bar{v}, a') \delta(a - a_i) , \quad (3)$$

mit

$$\Sigma_i(v, \bar{v}, a') = \int_{h \geq h_{min}} \sigma_i(v, \bar{v}, a', h) Q^0(v, \bar{v}, a', h) D(h|v) dh .$$

Die Zustandsdichte kann damit ebenfalls nur diskrete Beschleunigungswerte

$$f(v, a, t) = \sum_{i=1}^m f_i(v, t) \delta(a_i - a) \quad (4)$$

mit der Norm

$$\sum_{i=1}^m \int_v f_i(v, t) dv = 1 \quad (5)$$

annehmen. Setzt man 4 zusammen mit der Definition von Σ in Gleichung 1 ein, so erhält man m Gleichungen für die gesuchten Gewichte f_i

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i \frac{\partial f_i}{\partial v} = \sum_{k,l=1}^m \int_{\bar{v}} \{ \Sigma_i(v, \bar{v}, a_k) f_k(v, t) - \Sigma_k(v, \bar{v}, a_i) f_i(v, t) \} f_l(\bar{v}, t) d\bar{v} , \quad i = 1, \dots, m . \quad (6)$$

Um dieses Gleichungssystem numerisch auswerten zu können müssen nun noch z.B. mittels Standarddiskretisierungsverfahren die Differentiale und das Integral bearbeitet werden. Das dabei entstehende Gleichungssystem erfordert große Computerressourcen zur Lösung, wie dies schon aus der Gaskinetik bei der Lösung der ähnlichen Boltzmanntransportgleichung bekannt ist.

Ogleich die primäre Begründung für das diskrete Interaktionsmodell seine numerische Behandlung war, kann es doch auch für spezielle Verkehrsflußsituationen Näherungen liefern. Betrachtet man die Verkehrssituation eines verhältnismäßig homogenen Flusses mit nahezu konstanter Geschwindigkeit bei moderat-geringen Dichten, so daß mögliche 'Stop-and-Go'-Effekte keine Rolle spielen auf einer Ringstraße. Die mittlere Geschwindigkeit sei so hoch, daß die Zustandsdichte bezüglich der Geschwindigkeit ohne allzu großem Fehler auf die ganze reele Achse erweitert werden kann $v \in \mathbb{R}$. Als notwendige Bedingung für einen stationären Fluß wird eine verschwindende mittlere Beschleunigung angenommen. Trotzdem treten leichte Beschleunigungs- und Bremsprozesse auf. Diese werden durch einen diskreten Beschleunigungswert a_1 und einen diskreten Bremswert $a_2 < 0$ für alle Fahrzeuge gleich modelliert. Die Lösungen werden im stochastischem Equilibrium betrachtet, d.h. $f_i = f_i(v)$. Unter den Annahmen erhält man aus 6 zwei Gleichungen für f_1 , der Dichte der Beschleunigungszustände und f_2 , der Dichte der Bremszustände,

$$a_1 \frac{df_1(v)}{dv} = f_2(v) \int_{\bar{v}} \Sigma_1(v, \bar{v}, a_2) \tilde{f}_e(\bar{v}) d\bar{v} - f_1(v) \int_{\bar{v}} \Sigma_2(v, \bar{v}, a_1) \tilde{f}_e(\bar{v}) d\bar{v}$$

und

$$a_2 \frac{df_2(v)}{dv} = f_1(v) \int_{\bar{v}} \Sigma_2(v, \bar{v}, a_1) \tilde{f}_e(\bar{v}) d\bar{v} - f_2(v) \int_{\bar{v}} \Sigma_1(v, \bar{v}, a_2) \tilde{f}_e(\bar{v}) d\bar{v} ,$$

wobei

$$\tilde{f}_e(v) = \int_a f_e(v, a) da = f_1(v) + f_2(v) \quad (7)$$

die Zustandsdichte der Geschwindigkeitsverteilung ist. Damit eine stationäre Lösung und damit auch eine Equilibriumlösung existiert, muß die mittlere Beschleunigung in dem System verschwinden

$$\int_a a f_e(a, v) da = a_1 f_1(v) + a_2 f_2(v) = 0 . \quad (8)$$

Mit dieser Beziehung ist auch sofort die Kompatibilitätsbedingung Gleichung 15 aus [3] erfüllt. Die Summe der beiden Gleichungen verschwindet damit identisch. Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt mit $f_1 = \tilde{f}_e/(1 - a_1/a_2)$ und $f_2 = \tilde{f}_e/(1 - a_2/a_1)$, welches aus den Gleichungen 7 und 8 folgt

$$\frac{d\tilde{f}_e(v)}{dv} = -\tilde{f}_e(v) \int_{\bar{v}} \left(\frac{1}{a_2} \Sigma_1(v, \bar{v}, a_2) + \frac{1}{a_1} \Sigma_2(v, \bar{v}, a_1) \right) \tilde{f}_e(\bar{v}) d\bar{v}, \quad (9)$$

wobei zusätzlich noch die Normbedingung

$$\int_v \tilde{f}_e(v) dv = 1$$

hinzutritt. Die Gleichung spezifiziert $\tilde{f}_e(v)$ unter der Voraussetzung, daß eine Lösung existiert. Die Existenz einer Zustandsdichte der Geschwindigkeitsverteilung im Equilibrium hängt von der Wahl der Interaktionsterme ab wie in den folgenden Abschnitten noch deutlich wird.

1.1 Interaktion über Abstandsschwellwerte

Im folgenden wird Lösbarkeit und Lösung der Gleichung 9 für konkrete Interaktionsmodelle diskutiert. Betrachtet man o.g. Verkehrsfluß und nimmt an, daß die Interaktion primär abstandsgesteuert ist, d.h. der Fahrer verändert seine Geschwindigkeit wenn der Abstand zu seinem führenden Fahrzeug kleiner wird, als ein Schwellwert H , so ergibt sich für die Interaktionsrate (siehe Gleichung 19 aus [3])

$$Q^0(h, v, \bar{v}) = |\bar{v} - v| \delta(h - H).$$

Beschleunigt mit a_1 wird, sobald $v < \bar{v}$ ist, ansonsten wird mit a_2 gebremst. Dies bedeutet für die Interaktion 2, 3

$$\Sigma_1(v, \bar{v}) = |\bar{v} - v| D(H|v) \Theta(\bar{v} - v)$$

und

$$\Sigma_2(v, \bar{v}) = |\bar{v} - v| D(H|v) \Theta(v - \bar{v})$$

und damit für die Gleichung 9

$$\frac{d\tilde{f}_e(v)}{dv} = -D(H|v) \tilde{f}_e(v) \left(\frac{1}{a_2} \int_{\bar{v} > v} (\bar{v} - v) \tilde{f}_e(\bar{v}) d\bar{v} + \frac{1}{a_1} \int_{\bar{v} < v} (v - \bar{v}) \tilde{f}_e(\bar{v}) d\bar{v} \right). \quad (10)$$

Aufgrund der funktionalen Gleichartigkeit von Σ_1 und Σ_2 ist es auch schon anschaulich klar, daß ein stationärer Zustand nur bei betragsmäßig gleichen Beschleunigungswerten $a_1 = -a_2 = a$ existieren kann. Dies wird unten noch genauer diskutiert. Aus Gleichung 10 folgt somit

$$\frac{d\tilde{f}_e(v)}{dv} = \frac{D(H|v)}{a} \tilde{f}_e(v) (\mathcal{V} - v) \quad (11)$$

Wenn die Korrelationsfunktion $D(H|v) = D(H)$ unabhängig von der Geschwindigkeit v angenommen wird, so ist die Gleichung translationssymmetrisch in der Geschwindigkeitsvariablen und man hat als weiteren freien Parameter die mittlere Geschwindigkeit \mathcal{V} . Hierfür läßt sie sich analytisch lösen und ergibt unter der Normierungsbedingung

$$\tilde{f}_e(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{D(H)}{a}} e^{-D(H)(v-\mathcal{V})^2/2a} \quad (12)$$

eine Normalverteilung mit Erwartungswert \mathcal{V} und Varianz $a/D(H)$. Die Streuung nimmt proportional zu \sqrt{a} zu. Da a in diesem Fall proportional zur Streuung der Dichte der Interaktionsstärke σ ist, ergibt sich das anschaulich verständliche Ergebnis, daß mit Zunahme der Streuung in der Interaktionsstärke auch die Streuung in den Geschwindigkeiten zunehmen. Typische Abstandskorrelationsfunktionen fallen monoton mit zunehmendem Abstand. Daher nimmt die Streuung in den Geschwindigkeiten ebenfalls mit wachsendem H zu. Dies ist verständlich, da bei großen Abständen und damit auch großen Schwellwerten in der Entfernung zum führenden Fahrzeug das individuelle Fahrverhalten ausschlaggebend ist.

Die Normalverteilung 12 entstand durch die Entkopplung der Korrelation von der Geschwindigkeit, d.h der Erwartungswert des Abstandes ist unabhängig von der Geschwindigkeit oder jedes Fahrzeug hat unabhängig von seiner Geschwindigkeit den gleichen mittleren Abstand zum führenden Fahrzeug. Um den Einfluß einer geschwindigkeitsabhängigen Korrelation zu untersuchen wird nun der mittlere Abstand linear abhängig zur Geschwindigkeit des folgenden Fahrzeuges $\langle h \rangle(v) = h_{min} + \alpha v$ mit $\alpha = 1$ gesetzt. Dadurch muß auch die Dichte D der Abstandsverteilungsfunktion spezifiziert werden, da sie nun als Funktion von v in das Modell geht. Wie oben beschrieben, wird ein verhältnismäßig dünner Verkehrsfluß angenommen. Hierfür erscheint ein exponentielles Gesetz sinnvoll (siehe [4])

$$D(h|v) = D(h|\langle h \rangle(v)) = \frac{1}{\langle h \rangle(v)} e^{-(h-h_{min})/\langle h \rangle(v)} . \quad (13)$$

Für $v < 0$ wird mit $D = 0$ fortgesetzt. Nun besitzt Gleichung 11 keine approximative Translationssymmetrie, so daß die mittlere Geschwindigkeit \mathcal{V} von H und a abhängt. Die Lösung der Gleichung ist nun nur noch numerisch möglich (zum Verfahren siehe Anhang 2). Abbildung 1 zeigt das Verhalten der Zustandsdichte f_e als Funktion von der Geschwindigkeit für unterschiedliche Schwellwerte H . Charakteristisch ist dabei die Glockenform, welche auch schon in Gleichung 12 zum Ausdruck kam und im Kern auch experimentell bestätigt wird (Abb. 11 aus [1]). Große Schwellwertabstände entsprechen dabei Zustandsdichten mit hohen mittleren Geschwindigkeiten und großer Breite bzw. Streuung. Betrachtet man einen Fahrzeugstrom mit verhältnismäßig hohen Geschwindigkeitsanteilen unter Vernachlässigung möglicher Geschwindigkeitsschranken (durch z.B. die Wunschgeschwindigkeit des Fahrers) so ist dies stationär nur bei verhältnismäßig großen mittleren Abständen möglich. Die Interaktionsschwellen besitzen große Werte, die Interaktionsstärken sind klein. Verteilungen mit kurzreichweitigen Interaktionsschwellen dagegen entsprechen geringeren mittleren Abständen und damit auch kleineren Geschwindigkeiten der Fahrzeuge. Die Zustandsdichte ist zu kleinen Werten hin verschoben. Die Korrelation zwischen den Fahrzeugen nimmt zu und führt zu geringeren Streuungen. Läßt man $H \rightarrow h_{min}$ zu, so entsteht eine δ -förmige Dichte bei $v = 0$. Der Beschleunigungswert a ist in diesem Modell die Streuung der Zustandsdichte in der Beschleunigungsvariablen. Nimmt diese Streuung ab, so verringert sich auch die Streuung in der Geschwindigkeitsvariablen. Des weiteren nimmt auch die mittlere Geschwindigkeit ab. Hieraus folgt, daß im schon Equilibrium die mittlere Geschwindigkeit der Fahrzeuge eine Funktion der Beschleunigungsstreuung ist.

Unter Verwendung der Gleichungen 15 und 16 aus [3] ergibt sich mittels $\langle h \rangle$ aus 13 ein Ausdruck für den Zusammenhang zwischen Dichte und mittlerer Geschwindigkeit $\mathcal{K}^{-1} = h_{min} + \mathcal{V}$, entsprechend den Resultaten früher Fahrzeugfolgemodelle [5]. Dieser Ausdruck divergiert allerdings für kleine Dichten, da bisher im Modell keine obere Grenzgeschwindigkeit eingeführt wurde. Dagegen ist bei $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{max} = 1/h_{min}$ der erwartete Wert $\mathcal{V} = 0$. Obgleich der Divergenz

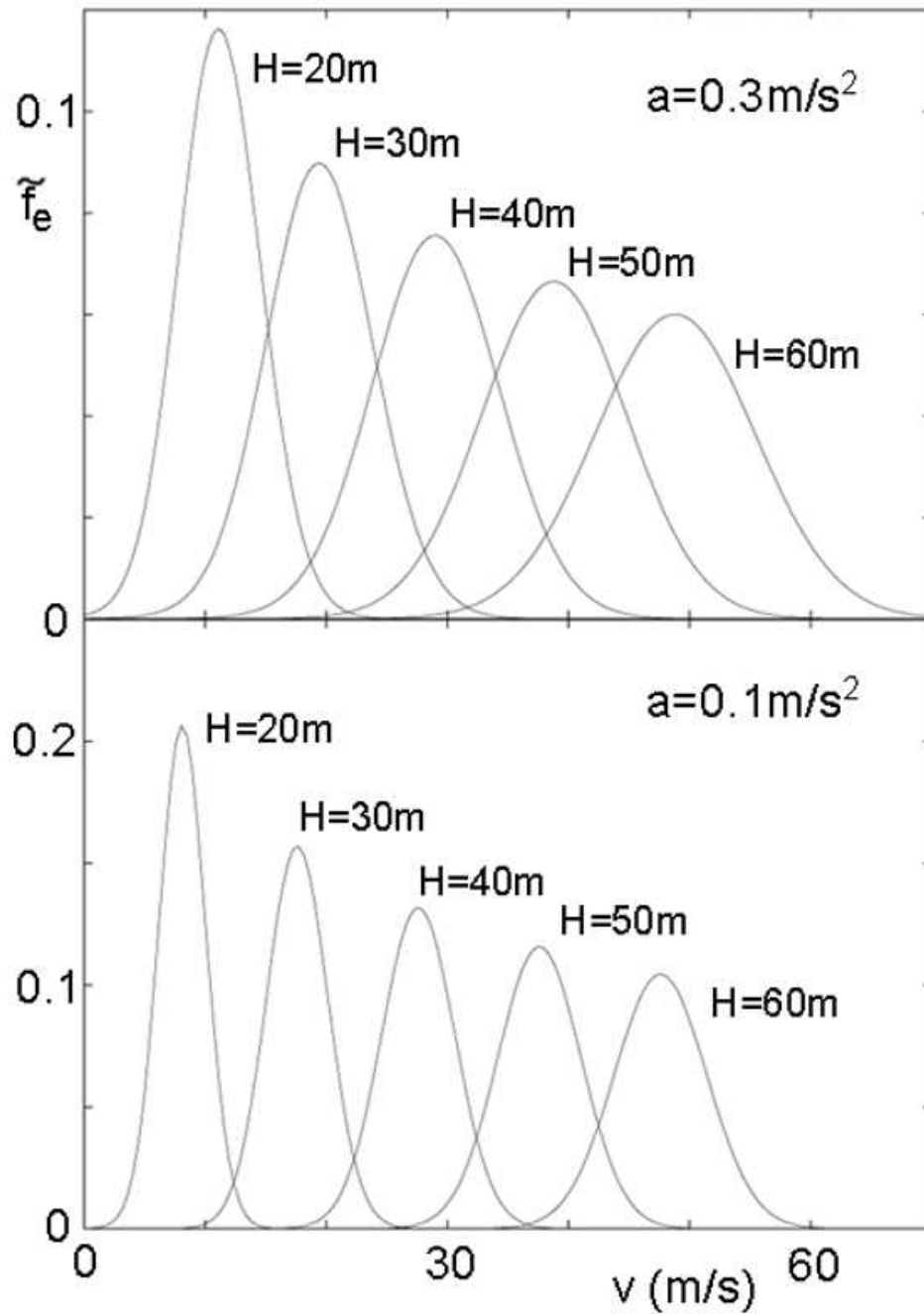


Abbildung 1: Zustandsdichte der Geschwindigkeit \tilde{f}_e für unterschiedliche Schwellwerte H und zwei Beschleunigungswerte a auf der Basis der Modellgleichungen 11 und 13 mit $h_{min} = 6.5\text{m}$.

bei kleinen Dichten, zeigt sich doch ein qualitativ interpretierbares Verhalten entsprechend dem des mittleren Teil des Fundamentaldiagrammes [6].

Bisher wurde der Fall betragsmäßig gleichen Beschleunigungs- und Bremsverhaltens besprochen. Betrachtet man nun Gleichung 10 mit $|a_1| \neq |a_2|$, so stellt sich hier die Frage nach einer normierbaren Gleichgewichtslösung. Wird der geklammerte Ausdruck in 10 als $g(v)$ bezeichnet, so gilt ist die erste Ableitung dieser Funktion $g'(v) \rightarrow 1/a_1$ für $v \rightarrow \infty$ und $g'(v) \rightarrow -1/a_2$ für $v \rightarrow -\infty$. Hierbei wurden die Funktionen wieder auf die Menge der reellen Zahlen fortgesetzt. Die zweite Ableitung ergibt $g''(v) = (1/a_2 + 1/a_1)\tilde{f}_e(v)$. Mit diesen Ausdrücken kann gezeigt werden, daß eine mittlere Geschwindigkeit \mathcal{V} im Equilibrium für genormte \tilde{f}_e nicht existiert und damit eine mögliche Gleichgewichtslösung nicht sinnvoll nutzbar ist. Mit $\epsilon = (1/a_2 + 1/a_1)$ ergibt sich

$$\epsilon \mathcal{V} = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} v \tilde{f}_e(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} v g''(v) dv = v g'(v) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(v) dv = v g'(v) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \epsilon \cdot 1$$

Da $g'(v)$ in den Grenzen $\pm\infty$ existiert und nicht verschwindet, existiert der gesamte Ausdruck auf der rechten Seite nicht für $\epsilon \neq 0$. Für $\epsilon = 0$ dagegen macht der Ausdruck keine Aussage über die Existenz des Mittelwertes. Dies entspricht dem Fall der betragsmäßigen Gleichheit von a_1 und a_2 . Obgleich dieses Resultat für die hier vorgestellten Interaktionsfunktionen verständlich ist, zeigt es doch, daß Zustandsdichten im stochastischem Gleichgewicht nicht notwendig existieren müssen ². Falls dieses Resultat auch für andere Interaktionsmodelle bestand hat, so ist es von weitreichender Bedeutung für die Erstellung makroskopischer Verkehrsflußmodelle. Die dafür oftmals durchgeführte und der Gaskinetik entlehnte Chapman/Enskog-Methode [7, 8] zur Bestimmung der makroskopischen Transportkoeffizienten setzt die Möglichkeit einer Entwicklung um ein stochastisches Gleichgewicht voraus und kann dann nicht angewandt werden.

1.2 Interaktion über Zeitschwellwerte

Eine alternative Interaktionsmodellierung ersetzt die abstandsabhängige Interaktionsrate durch eine konstante Interaktionsrate, die Kehrwert einer typischen Zeit T zwischen zwei Interaktionen ist. Diese in der Gasdynamik auch oftmals als 'Maxwell-Modell' bezeichnete Rate wird in der klassischen Transporttheorie oftmals als Modelltest eingesetzt, da es mathematisch einfach und, wie durch viele empirische Ergebnisse belegt, ein ähnliches Lösungsverhalten besitzt wie abstandsorientierte Modelle [3]. Als typische Zeit kann z.B. eine mittlere Reaktionszeit angenommen werden. Somit ist innerhalb verhältnismäßig kleiner Zeitintervalle eine Interaktion möglich. Die Stärke der Beschleunigungsänderung wird davon getrennt festgelegt, hier wird wieder das diskrete Modell mit zwei Beschleunigungswerten verwendet. Mit

$$Q^0(h, v, \bar{v}) = \frac{1}{T}$$

folgt

$$\Sigma_1(v, \bar{v}) = \frac{1}{T} \Theta(\bar{v} - v)$$

und

$$\Sigma_2(v, \bar{v}) = \frac{1}{T} \Theta(v - \bar{v})$$

²Es soll auf eine mathematisch strenge Formulierung verzichtet werden. Natürlich müssen die verwendeten Ausdrücke existieren und Differenzierbarkeitsbedingungen genügen.

und damit für die Gleichung 9

$$\frac{d\tilde{f}_e(v)}{dv} = -\frac{1}{T}\tilde{f}_e(v) \left(\frac{1}{a_1} \int_{\bar{v}>v} \tilde{f}_e(\bar{v})d\bar{v} + \frac{1}{a_2} \int_{\bar{v}<v} \tilde{f}_e(\bar{v})d\bar{v} \right). \quad (14)$$

Das Modell besitzt keine Abstandskorrelation, da die Interaktionsstärke unabhängig vom Abstand zwischen den Fahrzeugen ist. Die Interaktion wird vollständig vom Vorzeichen der auftretenden Relativgeschwindigkeit der Fahrzeugpaare bestimmt. Zuerst soll wieder der Fall $a_1 = -a_2 = a$ betrachtet werden, da dort mit einer Gleichgewichtslösung gerechnet werden kann. Auch diese Gleichung ist wieder mit obigem Argument translationssymmetrisch. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit freier Parameter. Skaliert man die Geschwindigkeiten in der Gleichung mit Ta so erhält man für die Streuung der Zustandsdichte eine Proportionalität zu Ta , d.h. auch in diesem Modell nimmt die Streuung der Geschwindigkeit mit der Streuung in der Beschleunigungsvariablen zu. Abbildung 2 zeigt die numerische Lösung der Gleichung 14 in standardisierter Form (zum numerischen Verfahren siehe Anhang 2). Obgleich das Modell

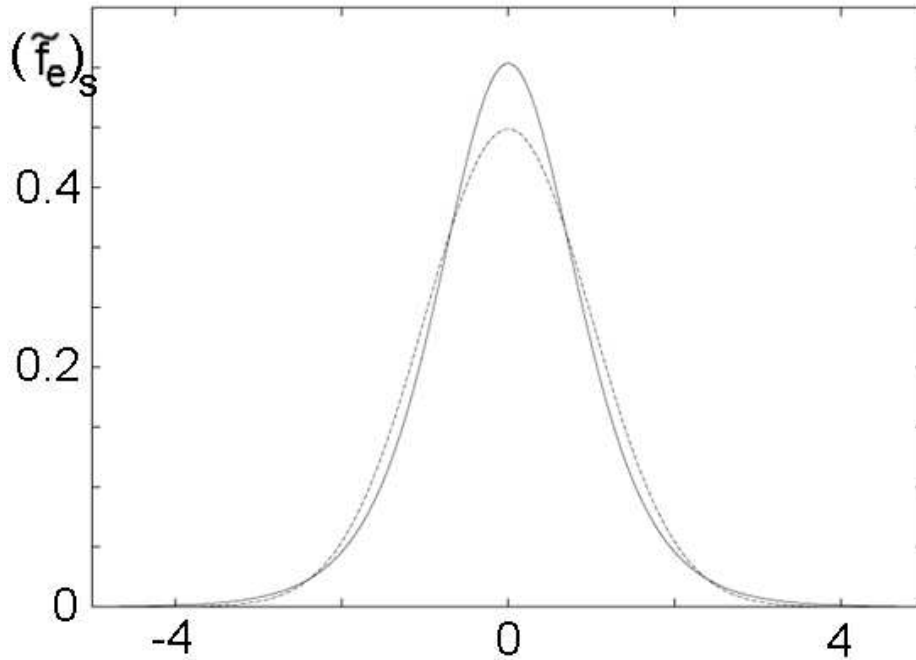


Abbildung 2: Standardisierte Zustandsdichte der Geschwindigkeit $(\tilde{f}_e)_s$ in Bezug auf Modellgleichung 14. Die Abszisse ist die Differenz der Geschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit bezogen auf die Streuung der Dichte. Zum Vergleich ist Gleichung 12 – die entsprechende Lösung des Abstandsschwellwertmodells – in standardisierter Form als gebrochene Kurve in die Abbildung eingetragen.

der konstanten Interaktionsrate einen eingeschränkten Praxisbezug besitzt, zeigt die Abbildung nur marginale Unterschiede zum Abstandsschwellwertmodell (Gleichung 12). Wie auch schon in der Literatur bemerkt ([9]), erscheint die Anwendung der konstanten Interaktionsrate zur Beschreibung prinzipieller Effekte innerhalb eines Modells auch im hier vorgestellten stochastischen Beschleunigungsmodell sinnvoll.

Analog zum Abstandsschwellwertmodell kann auch hier gezeigt werden, daß eine Gleichgewichtslösung nur für $a_1 = -a_2 = a$ existiert. Bezeichnet man den Term in der Klammer der rechten Seite der Gleichung 14 als $g(v)$, so läßt sich die Gleichung umschreiben zu $(g''(v) - g(v)g'(v) = 0$ bzw. $g'(v) - g(v)^2/2 = C$, wobei C eine aus den Randbedingungen für alle v gleichbleibende Konstante darstellt. Aus dem Verschwinden der Zustandsdichte im Unendlichen, d.h. aus einer Spezialisierung der Kompatibilitätsbedingung, Gleichung 15 aus [3], folgt sowohl $g'(|v| \rightarrow \infty) = 0$, als auch $g(v \rightarrow \infty) = 1/Ta_2$, $g(v \rightarrow -\infty) = -1/Ta_1$. Verwendet man diese Bedingungen zur Bestimmung der Konstanten C in der Differentialgleichung, so erhält man nur dann eine eindeutig bestimmte Zahl, wenn $a_2 = -a_1$ ist. Für $a_2 \neq -a_1$ ist somit keine Gleichgewichtslösung möglich³. Um das Verhalten der Zustandsdichten für $a_2 \neq -a_1$ zu beschreiben muß auf die instationäre Modellgleichung zurückgegriffen werden. Setzt man die Interaktionsterme in Gleichung 6 ein, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + a_1 \frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{1}{T} f_1 &= \frac{1}{T} \tilde{f}(v, t) \int_{\bar{v} > v} \tilde{f}(\bar{v}, t) d\bar{v}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{1}{T} f_2 &= \frac{1}{T} \tilde{f}(v, t) \int_{\bar{v} < v} \tilde{f}(\bar{v}, t) d\bar{v}. \end{aligned} \tag{15}$$

Die instationäre Zustandsdichte $\tilde{f}(v, t)$ ist analog zu 7 definiert. f_1 ist die Dichte der mit a_1 beschleunigenden Fahrzeuge, f_2 die der mit $a_2 < 0$ bremsenden Fahrzeuge. Eine numerische Lösung der beiden Gleichungen ist in Abbildung 3 zu sehen (zum Verfahren siehe Anhang 2). In den ersten Sekunden findet eine Trennung der beiden Verteilungen f_1 und f_2 statt, die dann aber wieder zusammenlaufen und ab ca. 12 Sekunden approximativ übereinstimmen. Die Verteilungen bewegen sich hin zu kleineren Geschwindigkeiten, da $a_1 < -a_2$ ist. Für große Zeiten liegen beide Verteilungen übereinander ($f_1 \approx f_2$) und lassen ihre Form unverändert. Die zeitliche Änderung drückt sich dann nur noch in einer Verschiebung der Verteilungen zu kleineren Geschwindigkeiten aus. Nimmt man für große Zeiten $f_1 = f_2$ an, so ergibt sich die mittlere Beschleunigung nach 8 unabhängig von der Geschwindigkeit zu $(a_1 + a_2)/2 = -0.1m/s^2$. Dies zeigt sich auch in Abbildung 3, wo sich die Verteilungen alle 4s um $-0.4m/s^2$ verschieben. Für die Form der Lösung für große Zeiten ergibt sich unter der Annahme $f_1 = f_2 = \tilde{f}/2$ nach Subtraktion der beiden Bestimmungsgleichungen voneinander eine Gleichung der Form 14 mit betragsmäßig gleichen Beschleunigungswerten der Größe $(a_1 - a_2)/2$.

Die Verkehrsflußinterpretation des Ergebnisses stellt sich etwas kompliziert dar, da sich die mittlere Geschwindigkeit mit der Zeit ändert, das heißt die Dichte ebenfalls zeitlich abhängig ist. Eine veränderliche Dichte ist nur durch Zu- bzw. Abflüsse realisierbar und benötigt Zu- bzw. Abfahrten, welche dann allerdings gegen den Homogenitätscharakter des Modells verstoßen. Das Modell Abb. 3 beschreibt einen homogenen, örtlich unabhängigen Zufluß von Fahrzeugen, die dann die mittlere Geschwindigkeit erniedrigen. Die Geschwindigkeitsverteilung des Zuflusses muß identisch mit der der Fahrzeuge im System sein, damit keine sichtbare Beeinflussung der Verteilung auftritt. Dies sind natürlich drastische Einschränkungen, welche den Modellfall $a_1 \neq -a_2$ akademisch erscheinen lassen.

³Auch hier soll auf eine mathematisch strenge Formulierung verzichtet werden. Natürlich müssen die verwendeten Ausdrücke existieren und Differenzierbarkeitsbedingungen genügen.

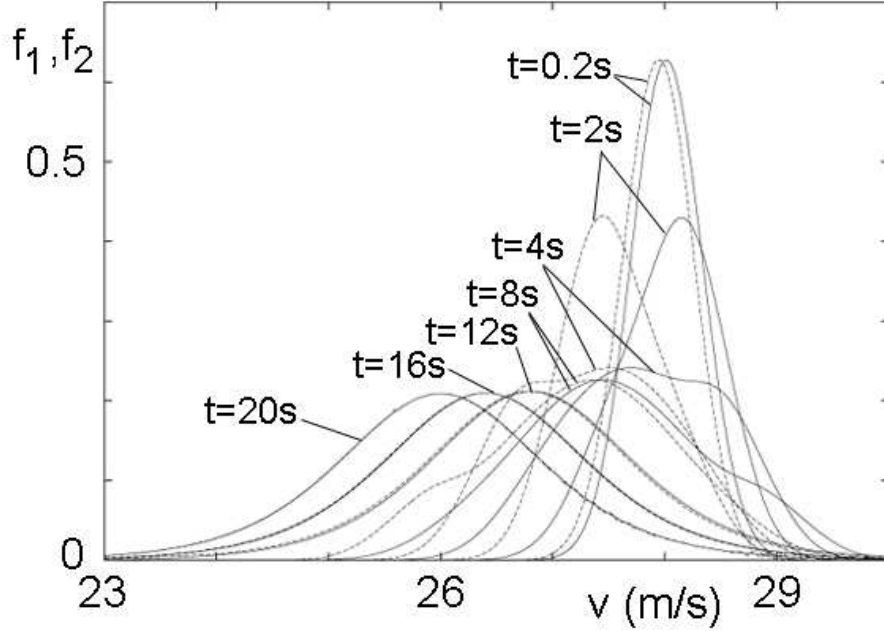


Abbildung 3: Zeitliche Entwicklung der beiden Zustandsdichten $f_1(v)$ und $f_2(v)$ (gebrochene Kurven) für die Parameter $T = 2s$, $a_1 = 0.2m/s^2$, $a_2 = -0.4m/s^2$. Als Anfangsverteilung wurde für beide Funktionen die gleiche Normalverteilung um den Mittelwert $\mathcal{V} = 28m/s$ und der Varianz 0.1 festgelegt.

2 Appendix: Numerical Remarks

To produce the results in this report, some numerical standard methods are used [10]. In this section these procedures are illustrated shortly.

Fig. 1 is calculated by solving

$$\frac{d\tilde{f}_e(v)}{dv} = \frac{D(H|v)}{a} \tilde{f}_e(v) \cdot (\mathcal{V} - v)$$

with condition $\int_0^{v_{max}} \tilde{f}_e(v) dv = 1$ in the interval $v \in [0, v_{max}]$ numerically using a 4th order Runge-Kutta-shooting method for differential equations for given \mathcal{V} and $\tilde{f}_e(v = 0)$. The numerical solution is normalized approximating the integral by a second order trapezoidal rule. Then, $\mathcal{V}_1 = \int_0^{v_{max}} v \tilde{f}_e(v) dv$ is calculated by the same integration rule. The shooting procedure is repeated until $\mathcal{V}_1 \approx \mathcal{V}$ up to a numerical error changing the initial condition $\tilde{f}_e(v = 0)$.

The solution of eq. 14 for Maxwell interaction, as is shown in fig. 2 is found analogously. For $a_1 = a_2 = a$ and after scaling the velocity variable to Ta eq. 14 can be written as

$$\frac{d\tilde{f}_e(v)}{dv} = g(v) \cdot \tilde{f}_e(v),$$

where $-g(v)$ is identified to the term in brackets on the right hand side. Then,

$$\frac{dg(v)}{dv} = -2 \cdot \tilde{f}_e(v)$$

with conditions $g(0) = 0$ and $g(\infty) = -1$ holds. Now, this differential equation system is also solved using a 4th order Runge-Kutta-shooting method in the interval $v \in [0, v_{max}]$, changing the initial condition $\tilde{f}_e(v = 0)$ until $g(v_{max}) \approx -1$ is fulfilled approximately.

Fig. 3 shows the solution of the eqs. 15 for Maxwell interaction. It is produced numerically by direct discretization of the derivatives and the integrals. Let $f_1^{(i,j)}$ and $f_2^{(i,j)}$ be the discrete values of the functions $f_1(v, t)$, $f_2(v, t)$ at $t = i\Delta t$ and $v = j\Delta v$ with $\Delta v = v_{max}/n$. Here n describes the number of grid points in the velocity interval $[0, v_{max}]$. Then eqs. 15 can be approximated by

$$\begin{aligned} & \frac{f_1^{(i+1,j)} - f_1^{(i,j)}}{\Delta t} + a_1 \frac{f_1^{(i,j+1)} - f_1^{(i,j-1)}}{2\Delta v} + \frac{1}{T} f_1^{(i,j)} = \\ & \frac{1}{T} (f_1^{(i,j)} + f_2^{(i,j)}) \frac{1}{2\Delta v} \left(f_1^{(i,j)} + f_2^{(i,j)} + 2 \sum_{k=j+1}^{n-1} (f_1^{(i,k)} + f_2^{(i,k)}) \right), \\ & \frac{f_2^{(i+1,j)} - f_2^{(i,j)}}{\Delta t} + a_2 \frac{f_2^{(i,j+1)} - f_2^{(i,j-1)}}{2\Delta v} + \frac{1}{T} f_2^{(i,j)} = \\ & \frac{1}{T} (f_1^{(i,j)} + f_2^{(i,j)}) \frac{1}{2\Delta v} \left(f_1^{(i,j)} + f_2^{(i,j)} + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (f_1^{(i,k)} + f_2^{(i,k)}) \right) \end{aligned}$$

for $i > 2$, $j = 1, \dots, n$ using the trapezoidal rule and the boundary conditions $f_1^{(i,0)} = 0$, $f_1^{(i,n)} = 0$, $f_2^{(i,0)} = 0$ and $f_2^{(i,n)} = 0$. The initial conditions $f_1^{(0,j)}$, $f_2^{(0,j)}$ have to be normalized and for $j = 1$ the central derivative approximation in velocity is changed to a forward one like the time approximation. This explicit discretization scheme is in principal unstable. Nevertheless for small enough Δt , it is tested to produce stable results in the time range of interest.

Literatur

- [1] K. T. Waldeer. Diskussion von verkehrsgrößen anhand von messungen. Technical Report 1, Fachbereich Transport- und Verkehrswesen der Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel, 1999.
- [2] P. Whittle. *Systems in Stochastic Equilibrium*. John Wiley, New York, 1986.
- [3] K. T. Waldeer. Beschleunigungsorientierte stochastische Beschreibung von Verkehrsflüssen. Technical Report 1, Fachbereich Transport- und Verkehrswesen der Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel, 2000.
- [4] P. Nelson. A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 24(1-3):383, 1995.
- [5] W. D Ashton. *The Theory of Road Traffic Flow*. Methuen, London, 1966.
- [6] R. Wegener and A. Klar. A kinetic model for vehicular traffic derived from a stochastic microscopic model. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 25(7):785, 1996.
- [7] S. Chapman. The kinetic theory of simple and composite gases: Viscosity, thermal conduction and diffusion. *Proc. Royal Soc., London*, A93:1, 1916/17.

- [8] A. Klar and R. Wegener. Enskog-like kinetic models for vehicular traffic. *J. Stat. Phys.*, 87(1/2):91, 1997.
- [9] E. Ben-Naim and P. L. Krapivsky. Maxwell model of traffic flows. *Phys. Rev. E*, 59(1):88, 1999.
- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1972.