

# Stochastische Beschreibung von Verkehrsflüssen mittels fahrzeugorientierter Beschleunigungsprozesse

Die Beschreibung von Verkehrsflüssen mittels stochastischer Prozesse hat eine lange Tradition [1]. Es gibt eine Vielzahl unterschiedlichster Ansätze. Zu ihnen gehören zum einen warteschlangentheoretische Ansätze, zum anderen Ansätze, die auf stochastischen Mastergleichungen fußen. Mastergleichungen haben sich insbesondere in den Naturwissenschaften zu einer mächtigen Methode zur Beschreibung komplizierter Prozesse i.B. in der irreversiblen Thermodynamik entwickelt. Die bekannteste dieser Gleichungen ist die Boltzmannsche Transportgleichung [2]. Die Anwendung dieser Methode auf Verkehrsflüsse wurde erstmals von [3] durchgeführt und ist seitdem konsequent weiterentwickelt worden.

Das folgende Kapitel entwickelt ein Modell, welches zum einen dem Gedanken der Mastergleichung folgt, zum anderen aber die vielen Informationen, welche i.w. aus Fahrzeugfolgeexperimenten gewonnen wurden versucht zu integrieren.

Auf der Basis Markovscher Prozesse<sup>1</sup> wird ein stochastisches Modell für die Beschreibung von Verkehrsflüssen entwickelt, welches die Beschleunigung der Fahrzeuge, als zu Ort und Geschwindigkeit zusätzliche Prozeßvariable enthält. Ziel ist es eine Mastergleichung für die Fahrzeugzustandsdichte  $f(x, v, a, t)$  in Abhängigkeit vom Ort  $x$ , der Geschwindigkeit  $v$  und der Beschleunigung  $a$  zum Zeitpunkt  $t$  aufzustellen, welche als Eingangsgrößen fahrerbezogene Verteilungen voraussetzt.

Der Verkehrsfluß ist ein komplizierter Prozeß, dessen analytische Modellierung oftmals an die Grenzen des mathematisch Praktikablen stößt. Wie auch in nahezu allen anderen Verkehrsflußmodellierungen wird auch in diesem Report zunächst einmal ein vereinfachtes Szenario beschrieben, um zu testen, in wie weit das Modell in der Lage ist, Verkehrsflußeigenschaften qualitativ richtig wiederzugeben. Vereinfachend betrachtet das Modell zuerst Straßen ohne Überhol- oder Ausweichmöglichkeiten. Es wird nicht zwischen unterschiedlichen Fahrzeugklassen unterschieden. Statt dessen wird ein typisches Fahrzeug fester Länge angenommen. Die Interaktion geschieht durch Änderung der Beschleunigung eines Fahrzeuges, ausgelöst durch ein vorausfahrendes Fahrzeug wobei das führende Fahrzeug von der Interaktion unbeeinflusst bleibt (einseitige Fahrzeugpaarwechselwirkung). Dies ist eine fundamentale Annahme des Modells, so daß die Interaktionen vom gleichen Typ wie jene in Fahrzeugfolgmodellen sind.

Abb. 1, [5], zeigt u.a. die Beschleunigungsänderungen interagierender Fahrzeuge über der Zeit. Dabei wird deutlich, daß die Dauer einer Beschleunigungsänderung vernachlässigbar gegenüber der typischen Geschwindigkeitszeitskalen ist. Eine echte Mehrfahrzeuginteraktion ist daher zum einen aus Zeitgründen, zum anderen durch das Fahrerverhalten auch bei hohen Verkehrsdichten untypisch (Die Aufmerksamkeit des Fahrers schwankt i.a. von Fahrzeug

---

<sup>1</sup>Dies sind vereinfacht ausgedrückt stochastische Prozesse ohne 'Erinnerungsvermögen' (siehe dazu z.B. [4]).

zu Fahrzeug, ist aber zu jedem Zeitpunkt höchstens einem Fahrzeug zuordenbar.). Durch Hinzunahme der Beschleunigung als Prozeßvariable werden auch korrelierte Paarinteraktionen (z.B. weitere Interaktion während der Änderung der Beschleunigung, Beschleunigung aufgrund einer vorherigen Beschleunigungsänderung) unwahrscheinlich. Fahrer sind kaum in der Lage, daß Beschleunigungsverhalten anderer Fahrzeuge direkt zu erkennen (siehe [5]) oder sich bis auf seltene, extreme Situationen an die eigene, letzte Beschleunigungsänderung zu erinnern. Definiert man ein Fahrzeugpaar durch ihre jeweiligen kinematischen Größen  $\mathbf{y} = (x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a})$ , so stellt dieser Vektor einen stochastischen Prozeß in der Zeit dar, welcher durch einen 'erinnerungslosen' Prozeß, d.h. Markovprozeß approximiert werden kann.

Da sich auf einer gegebenen Strecke eine endliche Zahl von Fahrzeugen befindet, ändert sich die Verteilungsfunktion in den Prozessvariablen i.a. unstetig. Daher kann eine Wahrscheinlichkeitsdichte im klassischen (differentierbaren) Sinne nicht eingeführt werden. Um diese Problematik zu umgehen, wird wie in [5] geschildert eine Einbettungsdichte eingeführt. Die Einbettungsdichte wird so eingeführt, daß ihre Verteilungsfunktion in den diskreten Punkten mit der entsprechenden, diskreten Verteilungsfunktion übereinstimmt. Eine Diskussion dieser Vorgehensweise findet sich z.B. in [6].

Es gibt zwei prinzipiell unterschiedliche Möglichkeiten den Markovprozeß zu beschreiben. Zum einen kann man von sprungförmigen stochastischen Änderungen des Prozeßvektors ausgehen, zum anderen von stetigen Änderungen. Beide Ansätze werden hier in den folgenden beiden Abschnitten erläutert. Zum Schluß dieses Kapitels werden die für das Modell notwendigen Eingangsgrößen erläutert. Hier spielen Schwellenwertverteilungen eine besondere Rolle.

## 1 Der Sprungprozeß in der Beschleunigung

Im folgenden Abschnitt wird die Beschleunigungsänderung des folgenden Fahrzeuges  $a$  in Form von Sprüngen dargestellt, da ihre Dauer vernachlässigbar gegenüber den anderen Zeitskalen des Prozesses angenommen wird. Die anderen Größen des Prozeßvektors, d.h. Ort  $x$  und Geschwindigkeit  $v$  des folgenden Fahrzeuges, sowie Ort  $\bar{x}$ , Geschwindigkeit  $\bar{v}$  und Beschleunigung  $\bar{a}$  des führenden Fahrzeuges sind über die kinematischen Gleichungen deterministisch an das Beschleunigungsverhalten angekoppelt. Gegeben sei ein interaktionsfreies Fahrzeugpaar zum Zeitpunkt  $t$ . So ergeben sich die Prozeßgrößen zur Zeit  $t + \tau$  aus denen zur Zeit  $t$  für den Fall, daß auch während  $\tau$  keine Interaktion stattfindet zu

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= x_t + v_t\tau + \frac{1}{2} a_t\tau^2, & \bar{x}_{t+\tau} &= \bar{x}_t + \bar{v}_t\tau + \frac{1}{2} \bar{a}_t\tau^2, \\ v_{t+\tau} &= v_t + a_t\tau, & \bar{v}_{t+\tau} &= \bar{v}_t + \bar{a}_t\tau, \\ a_{t+\tau} &= a_t, & \bar{a}_{t+\tau} &= \bar{a}_t, \end{aligned} \tag{1}$$

und für den Fall, daß zu einer Zeit  $\tau_0 < \tau$  genau eine Interaktion stattfindet zu

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= x_t + v_t\tau_0 + \frac{1}{2} a_t\tau_0^2 + v_{t+\tau_0}(\tau - \tau_0) + \frac{1}{2} a_{t+\tau_0}(\tau - \tau_0)^2, & \bar{x}_{t+\tau} &= \bar{x}_t + \bar{v}_t\tau + \frac{1}{2} \bar{a}_t\tau^2, \\ v_{t+\tau} &= v_t + a_t\tau_0 + a_{t+\tau_0}(\tau - \tau_0), & \bar{v}_{t+\tau} &= \bar{v}_t + \bar{a}_t\tau, \\ a_{t+\tau} &= a_t + \epsilon_{\tau_0}, & \bar{a}_{t+\tau} &= \bar{a}_t, \end{aligned} \tag{2}$$

Hierbei wurde  $\tau$  so klein gewählt, daß das führende Fahrzeug während der Zeitspanne keine Interaktion und das folgende Fahrzeug höchstens eine Interaktion durchführt. Diese Annahmen, wie auch die Wahl von  $\tau_0 < \tau$  stellt im folgenden keine Einschränkung dar, da beim

Übergang zu infinitesimalen Größen i.w. der Fall  $\tau_0 = \tau \rightarrow 0^+$  betrachtet wird.  $\epsilon$  bezeichnet die Sprunghöhe, d.h. die Beschleunigungsänderung des folgenden Fahrzeuges bei eine Interaktion.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang vom Zustandsvektor  $\mathbf{y}_t = (x_t, v_t, a_t, \bar{x}_t, \bar{v}_t, \bar{a}_t)$  zu Vektor  $\mathbf{y}_{t+\tau} = (x_{t+\tau}, v_{t+\tau}, a_{t+\tau}, \bar{x}_{t+\tau}, \bar{v}_{t+\tau}, \bar{a}_{t+\tau})$  ist nach Anhang 4

$$p(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{y}_{t+\tau}, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{y}_t) d\mathbf{y}_{t+\tau} .$$

Sie zerfällt in die Wahrscheinlichkeit  $p_{js} d\mathbf{y}_{t+\tau}$  für das Ereignis einer sprunghaften Zustandsänderung, welche zusätzlich zur stetigen auftritt und in die Wahrscheinlichkeit des dazu disjunktem Ereignisses einer rein stetigen Änderung  $p_s d\mathbf{y}_{t+\tau}$ , d.h.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{y}_{t+\tau}, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{y}) &= p_s(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{y}_{t+\tau}, \epsilon_{\tau_0 < \tau} = 0, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{y}_t) \\ &+ p_{js}(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{y}_{t+\tau}, \epsilon_{\tau_0 < \tau} \neq 0, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{y}_t) . \end{aligned}$$

Da beim stetigen Prozeß in jedem noch so kleinem Zeitintervall  $\tau$  beliebig viele Zustandsänderungen stattfinden ist die totale Übergangswahrscheinlichkeit  $P_s(\mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) = 1$  unabhängig von  $\tau$ . Der in diesem Modell vorgestellte stetige Teilprozeß ist zusätzlich deterministisch. Aus diesen beiden Bedingungen ergibt sich

$$\begin{aligned} p_s &= \delta(x_{t+\tau} - x_t - v_t\tau - \frac{1}{2}a_t\tau^2) \delta(v_{t+\tau} - v_t - a_t\tau) \delta(a_{t+\tau} - a_t) \\ &\delta(\bar{x}_{t+\tau} - \bar{x}_t - \bar{v}_t\tau - \frac{1}{2}\bar{a}_t\tau^2) \delta(\bar{v}_{t+\tau} - \bar{v}_t - \bar{a}_t\tau) \delta(\bar{a}_{t+\tau} - \bar{a}_t) , \end{aligned} \quad (3)$$

wobei  $\delta$  die in Anhang 4 verwendete Diracsche Distribution ist [7]. Findet ein Sprung innerhalb von  $\tau$  statt, so ergibt sich  $p_{js}$  unter Verwendung der Gleichungen 2 zu

$$\begin{aligned} p_{js} &= \delta(x_{t+\tau} - x_t - v_t\tau - \frac{1}{2}a_t\tau^2) \delta(v_{t+\tau} - v_t - a_t\tau) \\ &\cdot \delta(\bar{x}_{t+\tau} - \bar{x}_t - \bar{v}_t\tau - \frac{1}{2}\bar{a}_t\tau^2) \delta(\bar{v}_{t+\tau} - \bar{v}_t - \bar{a}_t\tau) \delta(\bar{a}_{t+\tau} - \bar{a}_t) \\ &\cdot p_j(a_{t+\tau} - a_t = \epsilon_{\tau_0}, a_{t+\tau} \neq a_t | \mathbf{y}_t) , \end{aligned} \quad (4)$$

wobei Terme mit  $\tau - \tau_0$  vernachlässigt wurden. Der dabei entstehende Fehler ist aber vernachlässigbar, da unten nur der Grenzfall  $\tau \rightarrow 0^+$  betrachtet wird.  $p_j$  ist die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte des reinen Sprungprozesses in der Beschleunigungsvariablen, welcher natürlich weiterhin vom kompletten Zustandsvektor  $\mathbf{y}_t$  zur Zeit  $t$  abhängt.  $p_j$  läßt sich umschreiben als Produkt der Sprunghöhenverteilungsdichte und der totalen Sprungwahrscheinlichkeit schreiben

$$p_j(a_{t+\tau} - a_t = \epsilon_{\tau_0}, a_{t+\tau} \neq a_t | \mathbf{y}_t) = p_j(a_{t+\tau} - a_t = \epsilon_{\tau_0} | \epsilon_{\tau_0} \neq 0, \mathbf{y}_t) \cdot P_j(\epsilon_{\tau_0} \neq 0 | \mathbf{y}_t) .$$

Zur Bestimmung der Zeitentwicklung der Zustandsverteilungen wird die Kolmogorov-Feller Gleichung für Sprungprozesse herangezogen (Gleichung 34, Anhang 4)

$$\frac{\partial}{\partial t} f_2(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t_1) = \int_{\mathbf{z} \in \Omega} (q(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}, t) f_2(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) - q(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}, t) f_2(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t_1)) d\mathbf{z} . \quad (5)$$

$f_2(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{y}$  ist die Zustandsverteilung im Vektor  $\mathbf{y}$  zum Zeitpunkt  $t$ , wenn der Prozeß sich zum Zeitpunkt  $t_1$  im Zustand  $bfx$  befand. Diese gesuchte Größe beschreibt den gesamten

stochastischen Prozeß in Abhängigkeit von der Zeit. Eingangsgröße in die Kolmogorov-Feller Gleichung ist dabei die Dichte der Zustandsänderungsrate  $q$ , welche sich direkt aus den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_s + p_{js}$  ergibt

$$q(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}', t) = \left. \frac{dp_s}{d\tau} \right|_{\tau=0^+} + \left. \frac{dp_{js}}{d\tau} \right|_{\tau=0^+} \quad (6)$$

Dabei ist  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}_{t+\tau}$  bei  $\tau = 0^+$ . Des weiteren wird die totale Zustandsänderungsrate mittels 3 und 4 zu

$$Q^0(\mathbf{y}, t) = \int_{\mathbf{y}' \in \Omega} q(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}', t) d\mathbf{y}' = \left. \frac{dP_j}{d\tau} \right|_{\tau=0^+}, \quad (7)$$

wobei  $P_j|_{\tau=0^+} = 0$  verwendet wurde, da zur Zeit  $t$  nach Voraussetzung kein Sprung vorliegen soll<sup>2</sup>.  $\Omega$  umfaßt wie in Anhang 4 definiert den gesamten Zustandsraum, d.h.

$$\Omega = \{\mathbf{y} | 0 \leq x \leq \bar{x}; \bar{x}, v, \bar{v} \geq 0; a, \bar{a} \in [a_{min}, a_{max}]\}.$$

Die Geschwindigkeit der Fahrzeuge ist immer positiv, während die Orte o.B.d.A. auf die positiven Zahlen beschränkt sind. Hierbei ist natürlich das führende Fahrzeug vor dem folgendem. Die Beschleunigungswerte sind dem Intervall  $[a_{min}, a_{max}]$  entnommen, wobei  $a_{min} < 0$  der maximale Bremswert ist. Um Quellfunktionen in den folgenden Gleichungen zu vermeiden wird  $f_2 = 0$  auf  $\Omega = \mathbb{R}^6$  fortgesetzt. Somit werden zukünftig Quellen als inhomgene Randbedinungen im Ort oder der Geschwindigkeit formuliert. Weiterhin müssen die Interaktionsfunktionen  $Q^0$  und  $p_j$  so konstruiert sein, daß ein resultierender Wahrscheinlichkeitsfluß in das Gebiet mit  $f_2 = 0$  nicht möglich oder zumindest in Näherung vernachlässigbar ist.

Wie für Markovsche Sprungprozesse üblich, hängt auch in diesem speziellen Prozeßtyp die totale Änderungsrate  $Q^0$  nur von der totalen Sprungwahrscheinlichkeit ab. Bei rein stetigen Prozessen ist diese Rate natürlich 0 [8]. Mit der Definition  $\mathbf{z} = (x', v', a', \bar{x}', \bar{v}', \bar{a}')$ , den Gleichungen 6, 3 und 4 ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{z} \in \Omega} q(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}, t) f_2(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{z} &= -v \frac{\partial f_2}{\partial x} - a \frac{\partial f_2}{\partial v} - \bar{v} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} - \bar{a} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{v}} \\ &+ \int_{a'} Q^0(x, v, a', \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) \cdot p_j(a - a' = \epsilon_0 | \epsilon_0 \neq 0, x, v, a', \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t | \mathbf{x}, t_1) da', \end{aligned} \quad (8)$$

wobei  $\epsilon_0$  der Sprungwert bei  $\tau_0 = 0^+$  ist. Setzt man diesen und den Ausdruck 7 in Gleichung 6 ein, so erhält man eine lineare Integrodifferentialgleichung zur Bestimmung der bedingten Zustandswahrscheinlichkeitsdichte  $f_2(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t_1)$  zur Anfangsbedingung 35. Um eine Bestimmungsgleichung für die unbedingte Dichte  $f_2(\mathbf{y}, t)$  zu einer gegebenen Anfangsdichte  $f_2(\mathbf{x}, t_1 = 0) = f_{20}(\mathbf{x})$  zu erhalten, verwendet man i.a. ein dem Verfahren der Greenschen Funktionen bei linearen Differentialgleichungen entsprechendem Ansatz

$$f_2(\mathbf{y}, t) = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} f_2(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t_1) \cdot f_2(\mathbf{x}, t_1) d\mathbf{x}.$$

Setzt man hier für  $t = t_1 = 0$  die Anfangsbedingung 35 ein, so erhält man  $f_2(\mathbf{y}, t = 0) = f_{20}(\mathbf{y})$ , die Anfangsbedingung für die unbedingte Dichte. Die Bestimmungsgleichung für die unbedingte Dichte erhält man durch Multiplikation von 6 mit  $f_{20}(\mathbf{x})$  und anschließender

<sup>2</sup>Bei der Berechnung wird die Eigenschaft  $\int_{-\infty}^{\infty} f(w) \delta'(w) dw = f'(w)$  der Diracschen Distribution verwendet, wobei  $f$  eine beliebige auf  $\mathbb{R}$  differentierbare Funktion ist.

Integration über  $x \in \Omega$ . Im folgenden wird o.B.d.A.  $t_1 = 0$  angenommen. Da  $q$  in 6 nicht von  $\mathbf{x}$  abhängt ergibt sich nach Einsetzen von 7 und 8 die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_2}{\partial t} + v \frac{\partial f_2}{\partial x} + a \frac{\partial f_2}{\partial v} + \bar{v} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} + \bar{a} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{v}} + Q^0 f_2 \\ & = \int_{a'} Q^0(x, v, a', \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) \cdot p_j(a - a' = \epsilon_0 | \epsilon_0 \neq 0, x, v, a', \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}) f_2(x, v, a', \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) da' \end{aligned} \quad (9)$$

für  $f_2(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t)$  zu der Anfangsbedingung  $f_{20}$ . Obgleich die Gleichung linear und in sich abgeschlossen die Zeitentwicklung von  $f_2$  beschreibt, ist die Interpretation von  $f_2$  bzgl. einer Verkehrsflußinterpretation schwierig, da zum einen die Größen des vorausfahrenden Fahrzeuges sich nur kontinuierlich ändern, d.h. keine Beschleunigungsänderungen stattfinden, zum anderen die Ortskorrelation  $\bar{x} < x$  noch nicht enthalten ist. Damit ist ein führendes Fahrzeug nicht von gleicher Qualität wie ein folgendes und somit  $f_2$  nicht symmetrisch bzgl. eines Fahrzeugtausches. Dies kann aber durch einen Übergang zur Einfahrzeugzustandsdichte erreicht werden. Hierzu wird in der Literatur ein Chaos-Ansatz ('vehicular-chaos-assumption') entsprechend dem in der Boltzmanntransportgleichung verwendet<sup>3</sup>.

Sei die Wahrscheinlichkeit ein Fahrzeug mit Beschleunigung zwischen  $a$  und  $a + da$ , Geschwindigkeit zwischen  $v$  und  $v + dv$  am Ort zwischen  $x$  und  $x + dx$  zum Zeitpunkt  $t$  zu finden  $f(x, v, a, t) dx dv da$  mit

$$\int_{x,v,a} f(x, v, a, t) dx dv da = \int_{x,v} \tilde{f}(x, v, t) dx dv = \int_x \mathcal{F}(x, t) dx = 1 . \quad (10)$$

Der Zusammenhang zu der unsymmetrischen Fahrzeugpaarwahrscheinlichkeitsdichte  $f_2$  ergibt sich durch Integration

$$f(x, v, a, t) = \int_{\bar{x}, \bar{v}, \bar{a}} f_2(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) d\bar{x} d\bar{v} d\bar{a} . \quad (11)$$

Die Integration der Gleichung 9 über die gestrichenen kinematischen Größen liefert mit 11 eine Gleichung, die auf der linken Seite  $f$  mit  $f_2$  auf der rechten Seite koppelt. Um dort auch einen Ausdruck in  $f$  zu erhalten wird ein aus der Theorie dichter Gase entlehnter Ansatz verwendet [10], der auch schon in der Verkehrsflußtheorie vorgeschlagen wurde [11, 12].

Die Paardichte  $f_2$  läßt sich als Produkt bedingter Dichten schreiben

$$f_2(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) = f(x, v, a, t) \cdot l_1(\bar{x} | x, v, a, \bar{v}, \bar{a}, t) \cdot l_2(\bar{v}, \bar{a} | x, v, a, t) .$$

Während  $l_1$  die Dichte der Abstandsverteilung  $D$  bei vorgegebenen kinematischen Größen ist, muß  $l_2$  ein Funktional von  $f$  sein, da in dem hier vorgeschlagenem Modell jedes führende Fahrzeug auch zugleich selbst einem anderen folgt. Der zentrale Gedanke liegt zum einen in der Unabhängigkeit der kinematischen Größen des führenden Fahrzeuges von denen des

---

<sup>3</sup>In der physikalischen kinetischen Gastheorie können ähnliche Transportgleichungen für Wahrscheinlichkeitsdichten in der Orts- und Geschwindigkeitskoordinate zu jedem Zeitpunkt aus dem Liouvilleschen Theorem durch eine Hierarchie abgeleitet werden [9]. Dabei wird die  $N$ -Teilchenwahrscheinlichkeitsdichte i.w. aus der  $N + 1$ -Teilchenwahrscheinlichkeitsdichte berechnet. Kernstück dieser sogenannten BBGKY-Hierarchie ist die für physikalische Einzelstoßprozesse typische Invarianz gegenüber dem Teilchentausch, aus dem die Energie- und Impulserhaltung folgt. Das oben beschriebene Verkehrsmodell folgt nicht aus einer Hierarchie, obgleich formal ähnliche Gleichungen anstatt für Fahrzeugpaare auch für Fahrzeug- $N$ -Tupel hergeleitet werden können. Da aber i.a. die Aufmerksamkeit der Fahrer zu jedem Zeitpunkt immer nur einem Fahrzeug gilt, sind derartige Modelle nach Ansicht des Autors nur eingeschränkt sinnvoll.

folgenden, d.h.  $l_2(\bar{v}, \bar{a}|x, v, a, t) = l_2(\bar{v}, \bar{a}, t)$ , zum anderen in der Identifikation  $l_2(\bar{v}, \bar{a}, t) = f(\bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t)/\mathcal{F}(\bar{x}, t)$ . Mit Einführung der Abstandsvariablen  $h = \bar{x} - x$  anstatt  $\bar{x}$  ergibt sich

$$f_2(x, v, a, x + h, \bar{v}, \bar{a}, t) = f(x, v, a, t) \cdot \frac{f(x + h, \bar{v}, \bar{a}, t)}{\mathcal{F}(x + h, t)} \cdot D(h|x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t). \quad (12)$$

Dieser Ansatz enthält die Dichte der Abstandsverteilung  $D$  als Korrelationsfunktion in der Abstandsvariablen  $h$ . Durch die Wahl  $h \geq 0$  ist die Fahrzeugfolge definiert. Die Fahrpraxis zeigt, daß die Abstandswahl unabhängig vom Verhalten des führenden Fahrzeuges getroffen wird. Auch die aktuelle Beschleunigung des eigenen Fahrzeuges spielt dabei keine Rolle. Somit ist  $D = D(h|x, v, t)$  als Ansatz ausreichend.

Schreibt man kurz

$$\sigma(a|x, h, v, \bar{v}, a', \bar{a}, t) = p_j(a - a' = \epsilon_0 | \epsilon_0 \neq 0, x, v, a', \bar{x}, \bar{v}, \bar{a})$$

so ergibt sich die entgültige Bestimmungsgleichung von  $f$  unter Verwendung von 9 zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial v} \\ = \int_{h, \bar{v}, \bar{a}, a'} \left\{ \sigma(a|x, h, v, \bar{v}, a', \bar{a}, t) Q^0(x, h, v, \bar{v}, a', \bar{a}, t) f(x, v, a', t) \right. \\ \left. - \sigma(a'|x, h, v, \bar{v}, a, \bar{a}, t) Q^0(x, h, v, \bar{v}, a, \bar{a}, t) f(x, v, a, t) \right\} \\ \cdot \frac{f(x + h, \bar{v}, \bar{a}, t)}{\mathcal{F}(x + h, t)} \cdot D(h|x, v, t) dh d\bar{v} d\bar{a} da'. \end{aligned} \quad (13)$$

Hinzu treten noch die Anfangsbedingung  $f(x, v, a, t = 0) = f_0(x, v, a)$  und die Randbedingungen in  $x$  und  $v$ . Gleichung 13 enthält die Einzelfahrzeuginteraktionsrate  $Q^0$ , die Dichte der Interaktionsstärke  $\sigma$  und die Dichte der Abstandsverteilung zum führenden Fahrzeug  $D$ . Diese Größen sind statistische Größen des Einzelfahrerhaltens und können daher aus Einzelfahrerexperimenten oder Beobachtungen gewonnen werden. Sie können natürlich auch neben den kinematischen Einflüssen fahrerspezifische Faktoren, wie z.B. ein quantitatives Aggressivitätsmaß oder der Einführung einer Wunschgeschwindigkeit enthalten.

Gleichung 13 besitzt den typischen Aufbau einer Transportgleichung mit quadratischer Nichtlinearität. Derartige Gleichungen sind weit verbreitet zur Beschreibung von physikalischen Phänomenen mit verhältnismäßig geringer Interaktionsanzahl pro Zeit. Der wohl bekannteste Vertreter ist die Boltzmanntransportgleichung in der kinetischen Gastheorie, oder als deren Erweiterung die Enskogtransportgleichung. Die Besonderheit von Gleichung 13 gegenüber ähnlicher Modelle in der Literatur ist allerdings, daß die Interaktion nun durch eine sprunghafte Änderung der Beschleunigung und nicht durch eine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeit getragen wird. Während die linke Seite der Gleichung die stetige Änderung der kinematischen Variablen ohne Interaktion beschreibt, gibt die rechte Seite die sprunghafte Interaktion wieder. Der erste Summand stellt den Wahrscheinlichkeitsfluß aus irgendeinem Beschleunigungszustand in den Zustand  $a$  bis  $a + da$  dar, während der zweite Summand den Fluß aus dem Zustand  $a$  bis  $a + da$  in irgendeinen anderen beschreibt. Das quadratische Auftreten von  $f$  im Integranden ist Ausdruck der Paarinteraktion. Da die Interaktion ihren Ausdruck in Beschleunigungsänderungen findet und diese in Bezug auf alle anderen kinematisch relevanten Zeitskalen nur von kurzer Dauer sind, kann die Mehrfahrzeuginteraktion (entsprechend der Mehrkörperwechselwirkung in der kinetischen Gastheorie dichter Gase) vernachlässigt werden.

Die typischen makroskopischen Größen sind Momente von  $f$ . So ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit unter der Verwendung der Definition für  $\tilde{f}$ , Gleichung 10, zu

$$\mathcal{V}(x, t) = \int_v v \tilde{f}(x, v, t) dv . \quad (14)$$

Zur Bestimmung der Fahrzeugdichte wird neben  $f$  auch die Ortskorrelation in Form von  $D$  benötigt. Der mittlere Abstand zur Zeit  $t$  ist identisch mit dem Kerwert der mittleren Dichte  $K$  und ergibt sich unter Verwendung von 12 durch [13]

$$\begin{aligned} K^{-1}(t) &= \int_{x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}} (\bar{x} - x) f_2(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) dx dv da d\bar{x} d\bar{v} d\bar{a} \\ &= \int_{h, x, v} h D(h|v, x, t) \tilde{f}(x, v, t) dh dx dv = \int_v \langle h \rangle(x, v, t) \tilde{f}(x, v, t) dx dv , \end{aligned} \quad (15)$$

wobei  $\langle h \rangle$  der mittlere Abstand der Fahrzeuge mit Geschwindigkeit  $v$  am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  ist. Damit ist die makroskopische Fahrzeugdichte [5]

$$\mathcal{K}(x, t) = K(t) \mathcal{F}(x, t) . \quad (16)$$

## 2 Diskussion der Interaktionsgrößen

In [5] wurden unterschiedlichste Beobachtungen vorgestellt, die das Fahrerverhalten und damit auch die im vorherigen Abschnitt definierten Interaktionsgrößen – der Dichte der Interaktionsstärke  $\sigma$ , der Interaktionsrate  $Q^0$  und der Dichte der Abstandsverteilung  $D$  beeinflussen. Die Zeit- und Ortsabhängigkeit dieser Größen ist nur in Spezialfällen interessant. Betrachtet man z.B. einen Fahrzeugstrom, der gerade eine Autobahn verlassen hat, so besitzen die Fahrzeuge noch für eine gewisse Anpassungszeit i.a. eine zu hohe Geschwindigkeit und zu geringe Abstände zum führenden Fahrzeug. Erst nach einiger Zeit hat eine Anpassung an den neuen, langsameren Straßentyp (z.B. Bundesstraße) stattgefunden. Die Ortsabhängigkeit einer Interaktion wird z.B. durch Verkehrssignale verursacht. So führen Geschwindigkeitsbeschränkungen unabhängig vom Verhalten des führenden Fahrzeuges zu einer Anpassung der Geschwindigkeit durch eine Änderung der Beschleunigung. Im Falle eines ungesteuerten, sich selbst regelnden Verkehrsflusses treten diese Abhängigkeiten in den Interaktionsfunktionen nicht auf.

Da Fahrer wie in [5] erläutert das Beschleunigungsverhalten des führenden Fahrzeuges, wie auch ihr eigenes nur ungenau einschätzen können, werden Abstände i.w. durch die eigene Geschwindigkeit bestimmt. Abbildung 14, [5], zeigt, daß die Streuung und der mittlere Abstand mit wachsender Geschwindigkeit ebenfalls zunehmen. Für die Zunahme wurden in der Literatur unterschiedlichste Ansätze gemacht [14]. Bei großen Geschwindigkeiten treten große Schwankungen um den mittleren Abstand auf. Hier bieten sich somit langreichweitige Verteilungsfunktionen, wie z.B. die Exponentialfunktion an. Bei kleinen Geschwindigkeiten treten auch nur kleine Schwankungen um den mittleren Abstand auf. Damit erscheint eine kurzreichweitige Normalverteilung angemessen. Um eine genauere Modellierung vorzunehmen wird das fahrgemittelte Abstandsverhalten in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit benötigt. Unabhängig vom Fahrerverhalten ist der minimal mögliche Abstand durch die Länge der Fahrzeuge gegeben. In diesem Modell wird angenommen, daß die Fahrzeuge alle eine feste, typische Länge  $h_{min}$  besitzen (diese Einschränkung läßt sich unter Vorgabe einer Längenverteilung der Fahrzeuge aufheben). Somit verschwindet die Funktion  $D(h|v)$  für  $h < h_{min}$ .

Wie in [5] wiedergegeben, können Fahrer das Beschleunigungsverhalten führender Fahrzeuge nur unzureichend einschätzen. Daher kann das Interaktionsverhalten als unabhängig von der Beschleunigung des führenden Fahrzeuges  $\bar{a}$  angesehen werden. Der aktuelle Beschleunigungswert des eigenen Fahrzeuges spielt mit dem gleichen Argument nur in so weit eine Rolle, daß sich die Änderung nur in einem Intervall  $a \in [a_{min}, a_{max}]$  bewegt. In dem hier vorgestellten Modell ist das Beschleunigungsintervall für alle Fahrzeuge gleich. Somit verschwindet die Dichte der Interaktionsstärke für  $a$  außerhalb des Beschleunigungsintervalls, und damit beschränken sich die Integrale über die Beschleunigung auf das betrachtete Intervall. Innerhalb des Intervalls kann aber die Dichte der Interaktionsstärke  $\sigma$  als Funktion von  $h$ ,  $v$  und  $\bar{v}$  betrachtet werden, d.h.  $\sigma = \sigma(a|h, v, \bar{v})$ . Für den funktionalen Zusammenhang sind unterschiedlichste Ansätze denkbar. So stellt

$$\sigma(a|h, v, \bar{v}) = \delta(a - \langle a \rangle(h, v, \bar{v})) \quad (17)$$

ein deterministisches Modell dar, in dem die Beschleunigung  $a$  nach der Änderung mit der mittleren Beschleunigung  $\langle a \rangle$  übereinstimmt. Der funktionale Zusammenhang  $\langle a \rangle(h, v, \bar{v})$  ergibt sich z.B. aus dem aus mikroskopischen Fahrzeugfolgmodellen bekannten Ansätzen [15]. Der deterministische Zusammenhang kann durch die Einführung des Beschleunigungsrauschens als Varianz einer um  $\langle a \rangle$  liegenden Normalverteilung aufgelöst werden [14]. Ein weiterer Ansatz ist ein diskretes Beschleunigungsmodell mit  $m$  unterschiedlichen Beschleunigungswerten  $a_i \in [a_{min}, a_{max}]$ , d.h.

$$\sigma(a|h, v, \bar{v}) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(h, v, \bar{v}) \delta(a - a_i) \quad (18)$$

mit

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i(h, v, \bar{v}) = 1$$

aufgrund der Normierungseigenschaft von  $\sigma$ . Der diskrete Ansatz ist insbesondere bei der numerischen Lösung von Gleichungen des Types 13 von Interesse [12]. Durch eine hinreichend große Wahl von diskreten Beschleunigungswerten lassen sich kontinuierliche Verteilungen  $\sigma$  approximieren. Des weiteren läßt sich nach Einsetzen ein Integral der Gleichung 13 analytisch lösen.

Die Größe  $Q^0$  bezeichnet die Zahl der Interaktionen pro Zeit. Wie auch die Dichte der Interaktionsstärke kann auch  $Q^0$  als unabhängig von  $\bar{a}$  angenommen werden. Da Interaktionen durch Reizschwellen hervorgerufen werden [5], ist die Rate nur in gewissen Umgebungen charakteristischer Abstände und Geschwindigkeiten merklich verschieden von 0. Im einfachsten Fall, in dem angenommen wird, daß alle Fahrer den gleichen Schwellwert besitzen ergibt sich eine Funktion  $Q^0$ , welche für Werte ungleich des Schwellwertes verschwindet, aber bei Erreichen des Schwellwertes einen unendlich hohen Funktionswert haben. Hierdurch wird sichergestellt, daß beim Schwellwert auch sicher eine Interaktion stattfindet. Eine derartige Interaktionsrate wird im folgenden als deterministisch bezeichnet.

Zuerst soll nun ein Ausdruck für eine Interaktionsrate, die sich auf den deterministischen Abstandsschwellwert  $H$  bezieht entwickelt werden. Die Wahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt  $t + \tau$  eine Interaktion zu erfahren, wenn bis zur Zeit  $t$  keine Interaktion stattfand

$$P_j(\tau) = P(h(t) \leq H, h(t + \tau) > H) + P(h(t) > H, h(t + \tau) \leq H) .$$

Dabei ist  $h(t)$  der Abstand des betrachteten Fahrzeuges zum führenden Fahrzeug zum Zeitpunkt  $t$ .  $P_j$  entspricht der Sprungwahrscheinlichkeit aus Gleichung 7. Der erste Summand der rechten Seite beschreibt die Wahrscheinlichkeit einer Beschleunigungsinteraktion, während der zweite die Wahrscheinlichkeit für eine Bremsinteraktion aufgrund der Abstandsänderung wiedergibt. Nimmt man die Interaktion als deterministisch an, so ist

$$P(h(t) \leq H, h(t + \tau) > H) = \Theta_0(H - h(t)) \cdot \Theta(h(t + \tau) - H)$$

und

$$P(h(t) > H, h(t + \tau) \leq H) = \Theta_0(h(t) - H) \cdot \Theta(H - h(t + \tau)) ,$$

wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

und

$$\Theta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

die Heaviside Sprungfunktion ist. Beachtet man, daß  $h(t + \tau) = h(t) + (\bar{v} - v) \cdot \tau + 1/2 \cdot (\bar{a} - a) \tau^2$  gilt, so ergibt sich die Interaktionsrate durch Einsetzen obiger Gleichungen in 7 zu

$$\begin{aligned} Q^0(h, v, \bar{v}) &= \left. \frac{dP_j}{d\tau} \right|_{\tau=0^+} \\ &= \Theta_0(H - h) (\bar{v} - v) \Theta(\bar{v} - v) \delta(h - H) + \Theta_0(h - H) (v - \bar{v}) \Theta(v - \bar{v}) \delta(h - H) \\ &= |\bar{v} - v| \delta(h - H) . \end{aligned}$$

Da Fahrer i.a. mehrere Abstandsschwellen  $H_i$  besitzen, die aber stochastisch unabhängig sind (d.h. bei hinreichend kleinem  $\tau$  wird maximal eine Schwelle übersprungen), ergibt sich analog [12]

$$Q^0(h, v, \bar{v}) = |\bar{v} - v| \sum_i \delta(h - H_i) . \quad (19)$$

Neben den abstandsbezogenen gibt es auch noch geschwindigkeitsbezogene Schwellwerte. So beendet der beschleunigende Fahrer bei Erreichen seiner Wunschgeschwindigkeit  $w$  den Beschleunigungsvorgang. Obgleich dies keine Interaktion mit einem führenden Fahrzeug ist, kann formal eine Geschwindigkeitsinteraktion eingeführt werden. Setzt man diese Interaktion deterministisch an, so ergibt sich analog zu obiger Herleitung

$$Q^0(v, a) = a \Theta(a) \delta(w - v) .$$

Gleichung 13 besitzt keinen inhärenten Mechanismus um zu verhindern, daß bremsende Fahrzeuge negative Geschwindigkeiten erreichen können. Um dies zu vermeiden kann eine deterministische Interaktion bei  $v = 0$  für  $a < 0$  in analoger Weise zu 19 durch

$$Q^0(v, a) = -a \Theta(-a) \delta(v)$$

eingeführt werden. Natürlich muß in diesem Fall die Dichte der Interaktionsstärke ebenfalls deterministisch  $\sigma(a|v=0) = \delta(a)$  sein.

Schon die Beschreibung mittels deterministischer Interaktionsstärken zeigt, daß nur eine Kombination der oben vorgestellten Einzelfunktionen das gesamte Geschwindigkeits-, Abstands- und Beschleunigungsspektrum abdecken können. Die mathematische Komplexität nimmt noch mehr zu, wenn die Interaktionsfunktionen nichtdeterministische Anteile enthalten.

Neben den oben beschriebenen schwellwertbezogenen Interaktionsraten kann auch der etwas unrealistische Fall einer konstanten Interaktionsrate  $Q^0 = 1/T$  betrachtet werden, wobei  $T$  die feste Zeit zwischen zwei Interaktionen darstellt [16]. Obgleich dieses Modell unrealistisch erscheint, zeigt sich doch z.B. in der kinetischen Gastheorie, daß Lösungen der zu Gleichung 13 entsprechenden Boltzmanntransportgleichung, die auf dieser Wahl fußen zumindest qualitativ mit denen, die auf Schwellwerten fußen übereinstimmen<sup>4</sup>. Das Modell besteht i.w. durch die teilweise drastische Vereinfachung der Gleichung 13.

Wie z.B. in [18] erläutert, kann ein einfaches Überholmodell in Gleichung 13 über einen zusätzlichen Term in der Interaktionsrate eingefügt werden. Setzt man mit  $P_o$  eine i.a. von Parametern wie Verkehrsdichte, Geschwindigkeit, etc. abhängige Überholwahrscheinlichkeit an, so tritt eine Interaktion mit dem führenden Fahrzeug nur mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - P_o$  auf. Ergänzt man also die Interaktionsrate  $Q^0$  um den Faktor  $1 - P_o$  so verschwindet das Interaktionsintegral in 13 für  $P_o = 1$ , beeinflusst den Verkehrsfluß dagegen maximal für  $P_o = 0$ . Die so modellierte Überholwahrscheinlichkeit hängt maßgeblich von der Verkehrsdichte ab [19]. Die Zahl der Überholvorgänge nimmt mit zunehmender Fahrzeugdichte ab, wobei ab ca. 35 Fahrzeuge pro Km keine Überholvorgänge mehr stattfinden. Um eine detailliertere Beschreibung der Überholvorgänge in das Modell einzufügen, kann i.w. den Vorstellungen von [11] gefolgt werden. Dazu ist für jede Fahrspur eine eigene Gleichung vom Typ 13 aufzustellen, wobei allerdings zusätzliche Interaktionsterme auf der rechten Seite der Gleichung das Springen zwischen den Fahrspuren beschreiben [20].

### 3 Bemerkungen zum stetigen Beschleunigungsprozeß

Bisher wurde die Änderung der Beschleunigung des folgenden Fahrzeuges bei einer Interaktion als Sprungprozeß angenommen. Aufgrund der kurzen Dauer der Beschleunigungsänderung im Vergleich zu anderen Zeitskalen im Verkehrsfluß erscheint diese Annahme sinnvoll. Betrachtet man aber die Beschleunigungsganglinie eines Fahrzeuges (Abb. 1, [5]), so stellt sie sich als eine stetige Kurve dar. Daher bilden streng genommen die Beschleunigungsänderungen einen stetigen Prozeß. In diesem Abschnitt wird analog zum Sprungprozeß eine Gleichung für die Fahrzeugzustandsdichte auf der Basis eines stetigen Prozesses entwickelt.

Im Falle der stetigen Änderung der Beschleunigung nimmt in Gleichung 2 die Sprunghöhe  $\epsilon_{\tau_0}$  proportional zur Zeit  $\tau_0$  zu, d.h.  $\epsilon_{\tau_0} = \alpha \cdot \tau_0$ . Da die totale Übergangswahrscheinlichkeit beim stetigen Prozeß  $P_j(\mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) = 1$  für  $\tau > 0$  ist<sup>5</sup>, verschwindet die rechte Seite von 7. Im Gegensatz zum unstetigen Sprungprozeß läßt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_j$  als

$$p_j(a_{t+\tau} - a_t = \alpha\tau, a_{t+\tau} \neq a_t | \mathbf{y}_t) = p_j(a_{t+\tau} - a_t = \alpha\tau | \mathbf{y}_t)$$

schreiben. Setzt man dies in 4 ein, so ergibt sich unter Verwendung von 6 anstatt Gleichung

<sup>4</sup>Modelle mit konstanten Interaktionsraten werden in der Gaskinetik oftmals als Maxwell-Modelle bezeichnet. Sie stehen im Gegensatz zu Interaktionsraten, die proportional zur Relativgeschwindigkeit der Teilchen sind. Wie Untersuchungen zum Erreichen eines stochastischen Gleichgewichtes aus extremen Nichtgleichgewichtssituationen gezeigt haben, stimmen die Verteilungen qualitativ überein, zeigen aber unterschiedliche Equilibrierungszeiten [17].

<sup>5</sup>Obgleich dieser Abschnitt von stetigen Prozessen in der Beschleunigungsvariablen handelt, werden die Indizierungen aus dem letzten Abschnitt übernommen um den Bezug herzustellen. Betrachtet man den stetigen Prozeß als infinitesimalen Sprungprozeß, so ist diese Zuordnung auch inhaltlich verständlich.

8 der Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{z} \in \Omega} q(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}, t) f_2(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{z} &= -v \frac{\partial f_2}{\partial x} - a \frac{\partial f_2}{\partial v} - \bar{v} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} - \bar{a} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{v}} \\ &+ \int_{a' \in \mathbb{R}} \left. \frac{dp_j}{d\tau} \right|_{\tau=0^+} f_2(x, v, a', \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t | \mathbf{x}, t_1) da' , \end{aligned} \quad (20)$$

wobei  $p_j = p_j(a - a' = \alpha\tau | x, v, a', \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) = p_j(z | \tau, x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t)$  ist. Im folgenden wird der wichtige Fall der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte  $p_j(z)$  betrachtet, dessen zentrale Momente  $M_k(\tau, x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t)$ ,  $k > 0$  beliebig oft nach  $a$  differenzierbar sind, erste Ableitungen nach  $\tau$  besitzen und für  $\tau \rightarrow 0^+$  die mit der Form  $M_k = \tau \cdot m_k(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t)$  verschwinden, d.h.

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{z \in \mathbb{R}} z p_j(z) dz , \quad k = 1 , \\ M_k &= \int_{z \in \mathbb{R}} (z - \tau M_1^T)^k p_j(z) dz , \quad k > 1 , \end{aligned} \quad (21)$$

wobei die Funktionsargumente unterdrückt wurden. Für  $k = 0$  ergibt sich die Normierung von  $p_j$ . Dieser Ansatz ist für  $\tau = 0^+$  kompatibel zu der für stetige Prozesse geltenden Gleichung 38. Die Differentiation der beiden Gleichungen 21 nach  $\tau$  ergibt bei  $\tau = 0^+$

$$\int_{z \in \mathbb{R}} z^k \left. \frac{dp_j}{d\tau} \right|_{\tau=0^+} dz = m_k ,$$

eine Gleichung, welche  $m_k$  als allgemeine Momente der Ableitung von  $p_j$  nach  $\tau$  identifiziert. Diese Gleichung kann durch

$$\left. \frac{dp_j(z)}{d\tau} \right|_{\tau=0^+} = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)}(z)$$

nach der Ableitung von  $p_j$  aufgelöst werden, wie man durch Einsetzen überprüfen kann.  $\delta^{(k)}(z)$  ist die  $k$ -te Ableitung der  $\delta$ -Distribution. Setzt man den gefundenen Ausdruck in Gleichung 20 ein, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{z} \in \Omega} q(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}, t) f_2(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{z} &= -v \frac{\partial f_2}{\partial x} - a \frac{\partial f_2}{\partial v} - \bar{v} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} - \bar{a} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{v}} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} (m_k(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) \cdot f_2(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t | \mathbf{x}, t_1)) . \end{aligned} \quad (22)$$

Der Übergang zu unbedingten Zustandswahrscheinlichkeitsdichten findet durch Einführung einer Anfangsbedingung  $f_{20}$  wie im vorherigen Abschnitt beschrieben statt. Als Resultat ergibt sich die zu Gleichung 9 entsprechende Gleichung für den stetigen Prozeß

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + v \frac{\partial f_2}{\partial x} + a \frac{\partial f_2}{\partial v} + \bar{v} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} + \bar{a} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{v}} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} (m_k(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t) \cdot f_2(x, v, a, \bar{x}, \bar{v}, \bar{a}, t)) \end{aligned} \quad (23)$$

eine reine partielle Differentialgleichung für die gesuchte Funktion  $f_2$ , welche als Eingangsgrößen die Momente der Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte  $p_j$  nach  $\tau$  bei

$\tau = 0^+$  enthält. Um von dieser Gleichung zu einer Bestimmungsgleichung für die Fahrzeugzustandsdichte beim stetigen Prozeß zu gelangen, werden die gleichen Annahmen wie im vorherigen Abschnitt gemacht. Verwendet man dann 10, 11 und 12, so ergibt sich analog zu Gleichung 13 eine Fokker-Planck ähnliche Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial v} &= \int_{h, \bar{v}, \bar{a}} \frac{D(h|x, v, t)}{\mathcal{F}(x+h, t)} f(x+h, \bar{v}, \bar{a}, t) \\ &\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} (m_k(x, v, a, h, \bar{v}, \bar{a}, t) \cdot f(x, v, a, t)) dh d\bar{v} d\bar{a} . \end{aligned} \quad (24)$$

Hinzu treten noch Anfangsbedingungen und Randbedingungen.

Gleichung 24 enthält im Gegensatz zu Gleichung 13 neben Integralen auch i.a. unendlich viele differentielle Ausdrücke auf der rechten Seite. Diese Komplexität läßt sich verringern, wenn man die plausible Annahme macht, daß die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte i.w. durch die ersten drei Momente, d.h. dem Erwartungswert, der Varianz und der Schiefe getragen wird. Unter dieser Annahme bricht die Summe nach dem dritten Summanden ab. Der primäre Unterschied zwischen dem stetigen und dem Sprungmodell liegt nicht in der mathematischen Komplexität, sondern in der unterschiedlichen Interpretation der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte  $p_j$ . Im Sprungmodell spielt ausschließlich der Zustand zum Zeitpunkt der Interaktion eine Rolle. Wie die Interaktion durchgeführt wird ist in diesem Modell nicht enthalten. Dagegen enthält die Modellgleichung 24 für das stetige Modell Momente der Ableitung von  $p_j$  nach  $\tau$ , welche Kenntnisse über die Abhängigkeit von  $p_j$  von  $\tau$  erfordern, d.h. Kenntnisse über den Verlauf einer Interaktion bzw. einer Beschleunigungsänderung. Dies stellt eine zusätzliche Anforderung an die Interaktionsmodellierung. Beobachtungen über das konkrete Fahrerverhalten während eines Beschleunigungswechsels sind dem Autor unbekannt. Somit können Aussagen über die Momente  $m_k$  nur spekulativer Natur sein. Eine zusätzliche Problematik ergibt sich für den Fall, daß Fahrzeuge aufgrund von Bremsvorgängen zum Stehen kommen. Beim Sprungmodell existiert die Möglichkeit diesen Übergang in Form eines Schwellwertes der Interaktion zur sprunghaften Änderung auf  $a = 0$  anzusetzen. Beim stetigen Modell dagegen muß die Änderung der Beschleunigung schon bevor das Fahrzeug zum Stehen kommt durchgeführt werden. Andernfalls tritt eine widernatürliche, kurzzeitige Bewegung gegen den Verkehrsfluß auf. Dies erfordert eine spezielle Anpassung der Momente  $m_k$ , falls ein Verkehrsfluß im 'Stop-ans-Go'-Umfeld modelliert werden soll.

Im folgenden wird an einem einfachen Beispiel das Verhalten der Gleichung 24 demonstriert, um einen Hinweis auf ihre prinzipielle Anwendbarkeit in der Verkehrsflußmodellierung zu erhalten. Dazu wird der Kreisverkehr der Länge  $L$  ohne Zu- und Abflüsse – eine in der Literatur häufig für solche Analysen genutzte Geometrie – verwandt. Auf diesem Kreisverkehr bewegen sich  $N$  Fahrzeuge homogen verteilt mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  und ohne Beschleunigung  $a = 0$ . Die Verkehrsdichte sei so klein, daß Interaktionsschwellen keine Rolle spielen, d.h. die Beschleunigung der Fahrzeuge wird nicht aufgrund von Abständen oder Relativgeschwindigkeiten geändert. Die Korrelation zwischen den Fahrzeugen spielt eine untergeordnete Rolle, d.h.  $D(h|x, v, t) = \delta(h - L/N)$ . Trotzdem verändern die Fahrer stochastisch leicht ihre Geschwindigkeiten, es tritt ein Beschleunigungsrauschen um den Erwartungswert  $a = 0$  auf (Abb. 8, [5]). Nimmt man ausschließlich eine linear mit  $\tau$  zunehmende Varianz des Rauschens an so sind die Momente der Übergangswahrscheinlichkeit aus Gleichung 24  $M_k = 0$  für  $k = 1, 3, 4, \dots$  und  $M_2 = C \cdot \tau$ .  $m_2 = C$  entspricht der Varianz der Beschleunigungsänderung der einzelnen Fahrer pro Zeit. Es wird angenommen, daß das Rauschen bei allen Fahrern

gleich ist. Setzt man die  $m_k$  in 24 ein und beachtet, daß die Dichte homogen, also unabhängig vom Ort ist, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{C}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$$

für die Zustandsdichte  $f(v, a, t)$ . Die zugehörige Anfangsbedingung lautet  $f(v, a, t = 0) = \delta(v - v_0)\delta(a)$ . Dieses Modell besitzt keine inheränten Schwellwerte, d.h. es läßt sich nur anwenden, wenn die Schwankungen um  $v_0$  verhältnismäßig klein und  $v_0 \gg 0$  ist. Die Wahrscheinlichkeit Fahrzeuge mit negativen Geschwindigkeiten anzutreffen ist zwar prinzipiell nicht ausgeschlossen, aber abhängig von der Wahl von  $v_0$  wie die Lösung zeigt vernachlässigbar. Insbesondere bei kleinen Fahrzeugdichten muß Mit 'Stop-and-Go'-Effekten nicht gerechnet werden. Für hinreichend kleine  $C$  kann damit der Fehler, der durch die Erweiterung der Definitionsbereiche von  $v$  und  $a$  auf alle reellen Zahlen (auch die negativen!) vernachlässigt werden. In der Gaskinetik werden Gleichungen dieses Typs als Diffusionsgleichungen oder Fokker-Plank Gleichungen bezeichnet [21]. Die o.g. Gleichung besitzt die Lösung [22, 23]

$$f(v, a, t) = \frac{\sqrt{3}}{\pi C t^2} e^{-\frac{2}{C t} \left( a^2 - \frac{3a(v - v_0)}{t} + \frac{3(v - v_0)^2}{t^2} \right)},$$

die mittlere Geschwindigkeit  $\mathcal{V} = v_0$  und die mittlere Beschleunigung  $\mathcal{A} = 0$ . Die beschleunigungsgemittelte Geschwindigkeitsverteilung  $\tilde{f}(v, t)$  ist eine Normalverteilung mit Erwartungswert  $v_0$  und einer mit der Zeit zunehmenden Varianz von  $C \cdot t^3/3$ . Eine konstante Rate im Beschleunigungsrauschen erzeugt somit zeitlich wachsende Schwankungen der Geschwindigkeit um den Erwartungswert. Im realen Verkehr nehmen derartige Schwankungen aber nicht beliebig zu. So reduziert der Fahrer, wenn die Schwankungen zu groß werden den Wert von  $C$  drastisch bei  $v \approx v_0$ . Hierdurch wird die Streuung in Abständen sprunghaft zurückgenommen. Um diesen gegenläufigen Effekt zu modellieren sind weitere Momente von  $p_j$ , insbesondere ein Ausdruck für dessen Schiefe erforderlich.

Dieses einfache Beispiel zeigt für die hier gemachten Annahmen interpretierbare Resultate. Varianzen in den Verteilungen nehmen zu, Mittelwerte dagegen verändern sich nicht. Die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrößen sind normalverteilt. Dies zeigt die prinzipielle Anwendbarkeit des stetigen Modells auf den Verkehrsfluß.

## 4 Anhang: Markovsche Sprungprozesse in mehreren Variablen

In diesem Anhang werden die Zeitentwicklungsgleichungen für die Zustandswahrscheinlichkeiten bei Markovschen Sprungprozessen erläutert (Kolmogorov-Fellersche Gleichungen). Diese Gleichungen werden in der Standardliteratur i.a. in einer Sprungvariablen abgeleitet (z.B. [4, 24]). Liegt nun der zugrundegelegte Markovsche Prozeß als mehrdimensionaler Sprungprozeß vor, so ist die Vorgehensweise zwar analog, wobei allerdings auf die Ordnungsstruktur des eindimensionalen Zahlenstrahls verzichtet werden muß. Um in die mehrdimensionalen Sprungprozesse einzuführen, wird hier, der Originalabhandlung folgend [25], ein Abriß der Vorgehensweise gegeben. Dabei besteht kein Anspruch auf mathematische Strenge. Fragen der Durchführbarkeit von Operationen werden in der angegebenen Literatur beantwortet.

Gegeben sei ein  $n$ -dimensionaler Markovscher Prozeß zum Zeitpunkt  $t$  durch den Zustandsvektor  $\mathbf{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$ , welcher ein Element eines gegebenen Zustandsraumes  $\Omega$

ist. Ist  $\Gamma \subseteq \Omega$ , so versteht man unter  $P(\mathbf{X}_{t_2} \in \Gamma | \mathbf{X}_{t_1} = \mathbf{x})$  die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t_2 > t_1$  in  $\Gamma$  befindet, unter der Bedingung, daß er zum Zeitpunkt  $t_1$  den Wert  $\mathbf{X}_{t_1} = \mathbf{x}$  inne hatte. Die dazugehörige bedingte Verteilungsfunktion ist  $F(\Gamma, t_2 | \mathbf{x}, t_1)$ . Die mittlere Zustandsänderungsrate über eine Zeit  $\tau$  lautet

$$Q_\tau(\mathbf{x}, t, \Gamma, t + \tau) = \frac{P(\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x})}{\tau}, \quad \tau > 0, \quad (25)$$

wobei die Zählergröße die Übergangswahrscheinlichkeit  $P$  ist, mit der der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t + \tau$  in  $\Gamma$  liegt und ungleich des Zustandes zur Zeit  $t$  ist unter der Bedingung, daß der Zustand zur Zeit  $t$  den Wert  $\mathbf{x}$  besaß. Da für den Fall, daß  $\Gamma = \Omega$  ist, liegt jeder Zustand  $\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma$ . Damit ergibt sich die mittlere totale Änderungsrate

$$Q_\tau^0(\mathbf{x}, t) = \frac{P(\mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x})}{\tau}. \quad (26)$$

Betrachtet man ein infinitesimal kleines Zeitintervall, so werden aus den mittleren Änderungsraten in Gleichung 25 und 26 die aktuellen Änderungsraten zum Zeitpunkt  $t$

$$Q(\mathbf{x}, \Gamma, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} Q_\tau, \quad (27)$$

$Q^0(\mathbf{x}, t)$  analog. Die aktuellen Änderungsraten können natürlich nur bei unstetigen, sprunghaften Prozessen ungleich 0 sein.

Um nun die Zustandswahrscheinlichkeit durch die Übergangswahrscheinlichkeiten auszudrücken, müssen zwei Fälle unterschieden werden. Zum einen kann der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t$  in  $\Gamma$ , d.h.  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , zum anderen außerhalb von  $\Gamma$ , d.h.  $\mathbf{x} \notin \Gamma$  liegen. Für den ersten Fall ergibt sich für die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt  $t + \tau$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) &= P(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{X}_t \text{ oder } \mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) \\ &= P(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) + P(\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) \\ &= 1 - P(\mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) + P(\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (28)$$

für den zweiten

$$P(\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) = P(\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}). \quad (29)$$

Wählt man  $\tau$  hinreichend klein, so können die mittleren Raten durch die aktuellen angenähert werden, d.h.  $Q_\tau = Q$  bzw.  $Q_\tau^0 = Q^0$ . Setzt man die Gleichungen 25 und 26 unter Anwendung der Näherung in die Gleichungen 28 und 29 ein, so ergibt sich für die Verteilungsfunktion (die linke Seite der beiden Gleichungen 28 und 29)

$$F(\Gamma, t + \tau | \mathbf{x}, t) = \begin{cases} Q(\mathbf{x}, \Gamma, t) \cdot \tau, & \text{für } \mathbf{x} \notin \Gamma, \\ 1 - Q^0(\mathbf{x}, t) \cdot \tau + Q(\mathbf{x}, \Gamma, t) \cdot \tau, & \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{cases} \quad (30)$$

Ein Markovscher Prozeß erfüllt die verallgemeinerte Markovsche Gleichung

$$F(\Gamma, t_2 | \mathbf{x}, t_1) = \int_{\mathbf{z} \in \Omega} F(\Gamma, t_2 | \mathbf{z}, t) \cdot f(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{z}, \quad (31)$$

wobei  $t_1 < t < t_2$  und  $f$  die verallgemeinerte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $F$  ist, d.h.

$$F(\Gamma, t_2 | \mathbf{x}, t_1) = \int_{\mathbf{y} \in \Gamma} f(\mathbf{y}, t_2 | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{y} . \quad (32)$$

Betrachtet man nun die Verteilung zum Zeitpunkt  $t_2 = t + \tau$ , so folgt aus Gleichung 31 unter Berücksichtigung von 30 direkt

$$F(\Gamma, t + \tau | \mathbf{x}, t_1) = F(\Gamma, t | \mathbf{x}, t_1) - \tau \cdot \int_{\mathbf{z} \in \Gamma} Q^0(\mathbf{z}, t) f(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{z} + \tau \cdot \int_{\mathbf{z} \in \Omega} Q(\mathbf{z}, \Gamma, t) f(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{z} ,$$

mithin im Grenzfall  $\tau \rightarrow 0^+$

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\Gamma, t | \mathbf{x}, t_1) = - \int_{\mathbf{z} \in \Gamma} Q^0(\mathbf{z}, t) f(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{z} + \int_{\mathbf{z} \in \Omega} Q(\mathbf{z}, \Gamma, t) f(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) d\mathbf{z} . \quad (33)$$

Gleichung 33 zusammen mit 32 beschreibt die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion unter der Anfangsbedingung, daß das System zum Zeitpunkt  $t_1$  sich im Zustand  $\mathbf{x}$  befand. Unter der nicht immer erfüllten Annahme, daß sich die Raten  $Q$  und  $Q^0$  ebenfalls als Dichten schreiben lassen

$$Q(\mathbf{z}, \Gamma, t) = \int_{\mathbf{y} \in \Gamma} q(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}, t) d\mathbf{y} ,$$

$$Q^0(\mathbf{z}, t) = \int_{\mathbf{y} \in \Omega} q(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}, t) d\mathbf{y} ,$$

ergibt sich nach Einsetzen in 33 unter Berücksichtigung von 32 und einiger elementarer Umformungen

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t_1) = \int_{\mathbf{z} \in \Omega} (q(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}, t) f(\mathbf{z}, t | \mathbf{x}, t_1) - q(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}, t) f(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t_1)) d\mathbf{z} , \quad (34)$$

die Kolmogorov-Feller Gleichung für die Zeitentwicklung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t_1)$  eines Markovschen Prozesses mit der Dichte der Übergangsraten  $q$  und der Anfangsbedingung

$$f(\mathbf{y}, t = t_1 | \mathbf{x}, t_1) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) , \quad (35)$$

wobei  $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  die Diracsche Deltadistribution ist [7]<sup>6</sup>.

Für den angenommenen Fall, daß für die einzelnen Größen Dichten existieren, kann auch die Dichte der Übergangswahrscheinlichkeit  $p$  durch

$$P(\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \in \Gamma} p(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{y}, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (36)$$

definiert werden. Dabei ist

$$\int_{\mathbf{y} \in \Omega} p d\mathbf{y} = P(\mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) \quad (37)$$

die totale Sprungwahrscheinlichkeit aus einem Zustand  $\mathbf{x}$  bis zur Zeit  $\tau$ .

<sup>6</sup>Eine wichtige Eigenschaft der Diracschen Distribution für integrierbare Funktionen  $f(x)$  ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(x - y) dy = f(x) .$$

Für den besonderen Fall, daß für noch so kleine  $\tau > 0$  Sprünge mit der totalen Wahrscheinlichkeit 1 auftreten, wobei die Änderung der Prozeßgrößen für  $\tau \rightarrow 0^+$  mit Wahrscheinlichkeit 1 verschwinden, ergibt sich ein Prozeß mit stetigen Änderungen (stetiger Prozeß) und der singulären Übergangswahrscheinlichkeitsdichte

$$p(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{y}, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x})|_{\tau=0^+} = p(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{y} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x})|_{\tau=0^+} = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (38)$$

Betrachtet man kleine  $\tau$ , so kann die mittlere Zustandsänderungsrate  $Q_\tau$  in Gleichung 25 durch die aktuelle  $Q$  approximiert werden. Da  $Q$  unabhängig von  $\tau$  ist, gilt somit

$$Q(\mathbf{x}, \Gamma, t) = \left( \frac{d}{d\tau} P(\mathbf{X}_{t+\tau} \in \Gamma, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) \right) \Big|_{\tau=0^+},$$

oder für die entsprechenden Dichten

$$q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}, t) = \left( \frac{d}{d\tau} p(\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{y}, \mathbf{X}_{t+\tau} \neq \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}) \right) \Big|_{\tau=0^+}. \quad (39)$$

## Literatur

- [1] W. F. Adams. Road traffic considered as a random series. *Journal of the Institute of Civil Engineers, London*, 4, 1936.
- [2] L. Boltzmann. *Vorlesungen über Gastheorie, Teil I und Teil II*. Leipzig, 1895.
- [3] I. Prigogine. A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow. In R. Herman, editor, *First Int. Symp. on the Theory of Traffic Flow*. Elsevier, Amsterdam, 1961.
- [4] B. W. Gnedenko. *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie*. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt a.M., 1997.
- [5] K. T. Waldeer. Diskussion von verkehrsgrößen anhand von messungen. Technical Report 1, Fachbereich Transport- und Verkehrswesen der Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel, 1999.
- [6] C. F. Daganzo. *Fundamentals of Transportation and Traffic Operations*. Pergamon, 1997.
- [7] L. Schwartz. *Theorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [8] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, Heidelberg, Berlin, New York, 1997.
- [9] H. Grad. *Handbuch der Physik, Band XII*. Springer, Heidelberg, Berlin, 1958.
- [10] D. Enskog. Kinetische Theorie der Wärmeleitung, Reibung und Selbstdiffusion in gewissen verdichteten Gasen und Flüssigkeiten. *Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar.*, 63(4), 1922.
- [11] P. Nelson. A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 24(1-3):383, 1995.

- [12] R. Wegener and A. Klar. A kinetic model for vehicular traffic derived from a stochastic microscopic model. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 25(7):785, 1996.
- [13] W. F. Phillips. Kinetic model for traffic flow. Technical report, Mech. Engin. Dep., Utah State Univ., Logan, Utah, 1977.
- [14] R. Wiedemann. *Simulation des Straßenverkehrsflusses*. Schriftenreihe des Instituts für Verkehrswesen der Universität Karlsruhe, 1974.
- [15] R. Herman. Theoretical research and experimental studies in vehicular traffic. *A.R.R.B. Proceedings*, 3:25, 1966.
- [16] E. Ben-Naim and P. L. Krapivsky. Maxwell model of traffic flows. *Phys. Rev. E*, 59(1):88, 1999.
- [17] K. T. Waldeer and H. M. Urbassek. Thermalization of high energy particles in a cold gas. *Physica A*, 176:325, 1991.
- [18] I. Prigogine and R. Herman. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. Elsevier, New York, 1971.
- [19] U. Sparmann. *Spurwechselvorgänge auf zweispurigen BAB-Richtungsfahrbahnen*. PhD thesis, Fakultät für Bauingenieur- u. Vermessungswesen, Universität Karlsruhe, 1978.
- [20] D. Helbing. *Verkehrsdynamik*. Springer, Heidelberg, Berlin, 1997.
- [21] R. Becker. *Theorie der Wärme*. Springer, Heidelberg TB, 1985.
- [22] O. B. Firsov. *Sov. Phys.-Dokl.*, 11:732, 1967.
- [23] K. T. Waldeer and H. M. Urbassek. Small-angle multiple scattering of light particles at a glancing incidence for screened coulomb interaction. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:807, 1992.
- [24] M. Fisz. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1989.
- [25] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 2. John Wiley, New York, 1971.